IIS “BOSSO-MONTI”
A.S.2012 - 2013

ANALISI MATEMATICA

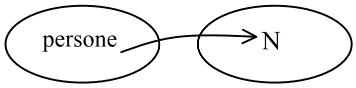
Prof. Francesca Alloatti

Materiale didattico per le classi quinte

SOMMARIO

CONCETTO DI FUNZIONE

Nel linguaggio quotidiano sono frequenti frasi del tipo: "Anna è nata a Napoli" , "Marco ha 43 anni" … Sono esempi di frasi che mettono in corrispondenza elementi di insiemi diversi: l'insieme delle persone con l'insieme dei comuni italiani, l'insieme delle persone con i numeri naturali, ecc.



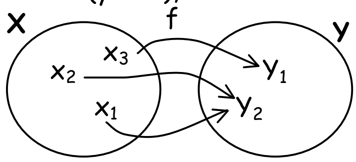
Corrisp: Persone → N

In ognuno dei casi si ha:
- insieme di partenza, detto DOMINIO
- insieme di arrivo, detto CODOMINIO
- una legge che associa gli elementi del dominio con quelli del codominio, detta corrispondenza.

Che differenza c'è tra queste due corrispondenze?
1. {Persone} → {comuni di Italia di nascita}
2. {comuni di Italia di nascita } → {Persone}

Nel primo caso, ad ogni persona è associato uno ed un solo comune di nascita
Nel secondo caso, ad ogni comune di nascita sono associate una o più persone.

📖 Def. Dati due insiemi, X e Y, si dice **FUNZIONE** (e si indica con f) una corrispondenza che associa ad ogni elemento x del primo insieme ($x \in X$), detto DOMINIO, uno ed un solo elemento del secondo insieme ($y \in Y$), detto CODOMINIO

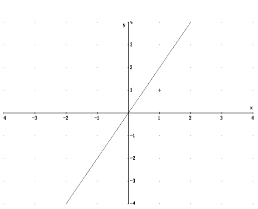


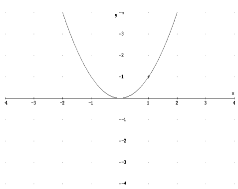
Osservando la figura si ha che:
- y_1 corrisponde a x_3 ⇒ $y_1 = f(x_3)$
- y_2 corrisponde a x_2 e x_1 ⇒ $y_2 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$

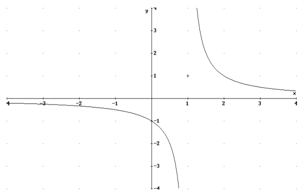
In generale, per indicare la funzione f e che x e y si corrispondono in questa funzione, si scrive:

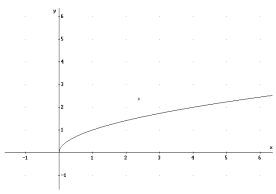
$y = f(x)$ che si legge: "y è uguale a f di x"

✍ Esempi di funzione:





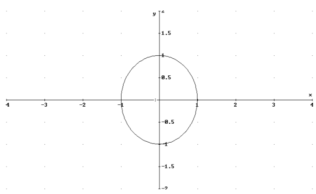


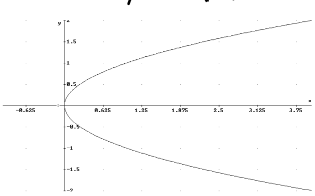


$y = 2x$	$y = x^2$	$y = \dfrac{1}{x-1}$	$y = \sqrt{x}$
$R \to R$	$R \to R^+$	___ → ___	___ → ___

✍ Esempi di corrispondenze che non sono funzioni; individua il perché.

$x^2 + y^2 = 1$ $y = \pm\sqrt{x}$





Classificazione delle funzioni

Funzioni esprimibili solo attraverso operazioni algebriche: somma, sottrazione, moltiplicazione, divisione ed elevamento a potenza o estrazione di radice

ALGEBRICHE

Funzioni non esprimibili attraverso le sole operazioni algebriche ma, per esempio, con il logaritmo, le funzioni trigonometriche…

TRASCENDENTI

RAZIONALI

Funzioni esprimibili solo attraverso le operazioni di: somma, sottrazione, moltiplicazione, divisione ed elevamento a potenza con esponente intero

- **INTERE**: $y = 3x^5 - \frac{2}{3}x^3 - \sqrt{2}$
- **FRATTE**: $y = \frac{2x^3 - 1}{1 - x}$

IRRAZIONALI

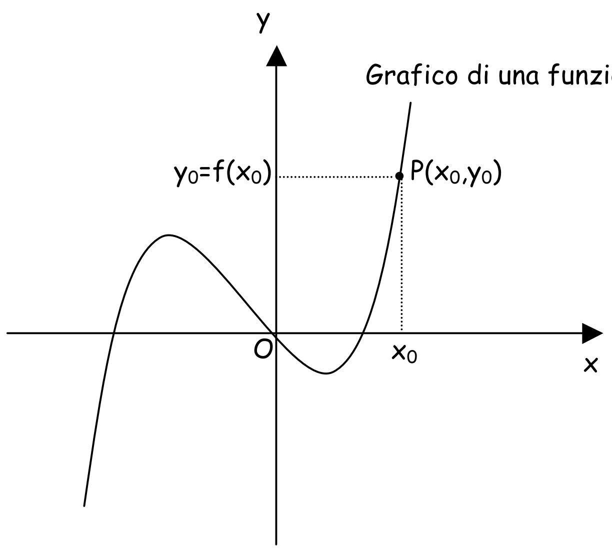
Funzioni contenenti nella loro espressione l'incognita sotto il segno di radice

- **INTERE**: $y = \sqrt[3]{1 - 2x^3}$
- **FRATTE**: $y = \sqrt{\frac{2x^3 - 1}{1 - x}}$

DOMINIO DELLE FUNZIONI ALGEBRICHE

📖 Def. Per **DOMINIO** di una funzione si intende l'insieme di quei valori reali che si possono attribuire alla variabile indipendente x per trovare il corrispondente valore reale della variabile y (variabile dipendente da x).
L'insieme dei valori che la variabile y assume, al variare della variabile x, è detto **CODOMINIO** o insieme delle immagini di x.

✍ Es. Data la funzione y = 3x – 1, all'elemento x = 3, appartenente al dominio della funzione y=f(x), corrisponde l'elemento y = 3×3 – 1 = 8, appartenente al codominio della funzione; quindi 8 = f(3)



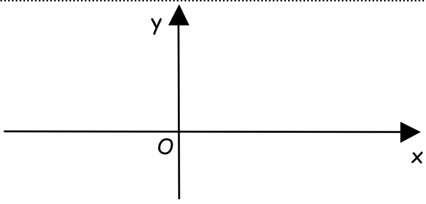
COME SI DETERMINA IL DOMINIO DI UNA FUNZIONE?

1. **FUNZIONI ALGEBRICHE RAZIONALI INTERE (POLINOMIALI)** $y = 3x^3 - 2x + 1$

*Devo chiedermi: quali sono i valori che posso attribuire alla variabile x che mi permettono di trovare il corrispondente valore di **y reale**?*
*O meglio: ci sono dei valori che **non posso attribuire alla x** perché non mi permettono di trovare il corrispondente valore di y reale?*

Procediamo per tentativi:
se $x = 0$ $\quad y = 1$ $\quad\Rightarrow\quad f(0) = 1 \Rightarrow$ la funzione passa per il punto (0; 1)
se $x = 1$ $\quad y = 3 - 2 + 1 = 2$ $\quad\Rightarrow\quad f(1) = 2 \Rightarrow$ la funzione passa per il punto (1; 2)
se $x = -1$ $\quad y = -3 + 2 + 1 = 0$ $\quad\Rightarrow\quad f(1) = 0 \Rightarrow$ la funzione passa per il punto (-1; 0)
e così via!
Quindi, quando la funzione è un polinomio non esistono dei valori che non posso attribuire a x!

Il dominio delle funzioni algebriche razionali intere è: $\{\forall x \in R\}$ ovvero tutti i numeri reali



La funzione assumerà un valore y_0 per qualsiasi valore x_0

2. **FUNZIONI ALGEBRICHE RAZIONALI FRATTE** $y = \dfrac{2x^2 + 1}{x - 1}$

*Quali sono i valori che posso attribuire alla variabile x che mi permettono di trovare il corrispondente valore di **y reale**?*
*O meglio: ci sono dei valori che **non posso attribuire alla x** perché non mi permettono di trovare il corrispondente valore di y reale?*

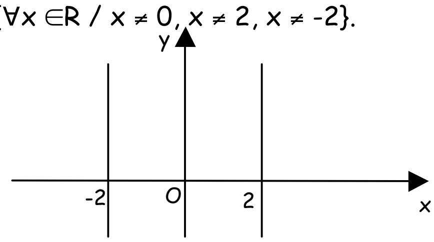
Procediamo per tentativi:
se $x = 0$ $\quad y = -1$ $\quad\Rightarrow\quad f(0) = -1 \Rightarrow$ la funzione passa per il punto (0; -1)
se $x = -1$ $\quad y = -3/2$ $\quad\Rightarrow\quad f(-1) = -3/2 \Rightarrow$ la funzione passa per il punto (-1; -3/2)
se $x = 1$ $\quad y = 3/0 = ?$
Perché non posso sostituire $x = 1$? Perche' annulla il denominatore!
Infatti: per che valore di x si ha che: $x - 1 = 0$? Per $x = 1$.
Quindi, quando la funzione è fratta per trovare il dominio, ovvero i valori che posso attribuire a x, devo porre il denominatore diverso da zero.

Il dominio delle funzioni algebriche razionali fratte è: $\{\forall x \in R \ / \ x \neq x_1, \ x \neq x_2, \dots\}$ dove $x_1, x_2, \dots$ sono valori reali che annullano il denominatore.

✍ Es: Determinare il dominio della funzione: $y = \dfrac{2 + x^3}{x^3 - 4x}$.

Pongo il denominatore uguale a zero per trovare i valori di x da escludere dai numeri reali.
$x^3 - 4x = 0 \quad \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0$
- $\boxed{x = 0}$
- $x^2 = 4 \quad \Rightarrow \boxed{x = +2}$ e $\boxed{x = -2}$

Quindi $D = \{\forall x \in R \ / \ x \neq 0, x \neq 2, x \neq -2\}$.



La funzione assumerà un valore y_0 per qualsiasi valore x_0 tranne che per $x = 0$, $x = 2$ e $x = -2$: si tracciano quindi queste tre rette verticali che la funzione non attraverserà mai! (Altrimenti si avrebbe una y corrispondente a tali valori di x). Generalmente saranno chiamate ASINTOTI VERTICALI

3. FUNZIONI ALGEBRICHE IRRAZIONALI INTERE $y = \sqrt{2x-3}$

Distinguiamo due casi differenti:

1. **Indice della radice DISPARI** es. $y = \sqrt[3]{2x-3}$

   *Quali sono i valori che posso attribuire alla variabile x che mi permettono di trovare il corrispondente valore di **y reale**?*

   *O meglio: ci sono dei valori che **non posso attribuire alla x** perché non mi permettono di trovare il corrispondente valore di y reale?*

   La radice con indice dispari si può sempre estrarre, sia che il radicando sia positivo che negativo.

Quindi, quando la <u>funzione è irrazionale intera</u> <u>con indice *dispari* non esistono dei valori che non posso attribuire a x</u>!

Il dominio delle funzioni algebriche irrazionali intere con indice dispari è: $\{\forall x \in R\}$

2. **Indice della radice PARI** es. $y = \sqrt{x+3}$

   *Quali sono i valori che posso attribuire alla variabile x che mi permettono di trovare il corrispondente valore di **y reale**?*

   *O meglio: ci sono dei valori che **non posso attribuire alla x** perché non mi permettono di trovare il corrispondente valore di y reale?*

   Procediamo per tentativi:

   se $x = 0$ $\quad y = \sqrt{3}$ $\quad \Rightarrow \quad f(0) = \sqrt{3} \Rightarrow$ la funzione passa per il punto $(0; \sqrt{3})$

   se $x = 3$ $\quad y = \sqrt{6}$ $\quad \Rightarrow \quad f(3) = \sqrt{6} \Rightarrow$ la funzione passa per il punto $(3; \sqrt{6})$

   se $x = -4$ $\quad y = \sqrt{-1} = ?$

   Perché non posso sostituire x = -4? Perche' rende negativo il radicando e la radice, con indice pari, di un numero negativo non esiste!!

Quindi, per determinare i valori reali che posso attribuire a x devo porre il <u>radicando maggiore o uguale a zero</u>.

Il dominio delle funzioni algebriche irrazionali intere con indice pari è:
$\{\forall x \in R \ / \ R(x) \geq 0\}$ dove per $R(x) \geq 0$ si intendono i valori di x che rendono positivo il radicando.

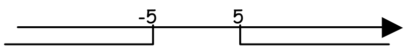
✍ Es: Determinare il dominio della funzione: $y = \sqrt{x^2 - 25}$.

Pongo il <u>radicando maggiore o uguale a zero</u>.

$x^2 - 25 \geq 0$

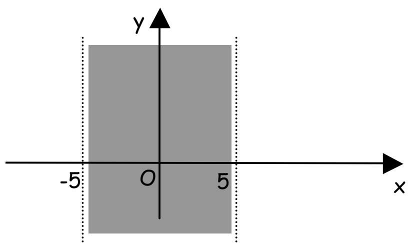
Risolvo l'equazione associata: $x^2 - 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 25 \Rightarrow \quad x = \pm 5$

Quindi la disequazione ha come soluzione:



Quindi $D = \{\forall x \in R \ / \ x \leq -5 \ , \ x \geq 5\}$.

La funzione assumerà un valore y_0 per qualsiasi valore x_0 <u>tranne</u> che quelli compresi nella parte di piano tra x = -5 e x = 5.



Si tracciano quindi le due rette verticali che limitano la zona e si cancella la regione compresa tra queste due rette. La funzione non attraverserà mai questa regione! Le due rette x=5 e x=-5 sono tratteggiate perché 5 e –5 sono valori appartenenti al dominio, per i quali, quindi esiste un corrispondente valore di y.

FUNZIONI ALGEBRICHE IRRAZIONALI FRATTE es: $y = \sqrt{\dfrac{2x-3}{x-1}}$

Distinguiamo due casi differenti:

1. **Indice della radice DISPARI** es. $y = \sqrt[3]{\dfrac{2x-3}{x-1}}$

   Abbiamo già visto che la radice con indice dispari si può sempre estrarre, sia che il radicando sia positivo che negativo.
   Ma, dal momento che il radicando è una funzione razionale fratta, devo porre la condizione che non si annulli il denominatore.

Quindi, quando la funzione è irrazionale fratta con indice *dispari* devo porre il denominatore del radicando diverso da zero.

Il dominio delle funzioni algebriche irrazionali fratte con indice dispari è:
$\{\forall x \in R \ / \ x \neq x_1,\ x \neq x_2, \ldots\}$ dove x_1, x_2, … sono valori reali che annullano il denominatore del radicando

2. **Indice della radice PARI** es. $y = \sqrt{\dfrac{3-x}{x+1}}$

   Abbiamo già visto che la radice con indice pari si può estrarre solo se il radicando è positivo.
   Il radicando è una funzione fratta, quindi bisognerebbe porre il *denominatore diverso da zero*; questa condizione è già inclusa nella precedente (perche' nel risolvere la disequazione fratta il denominatore è posto solo maggiore di zero, non anche uguale a zero!).

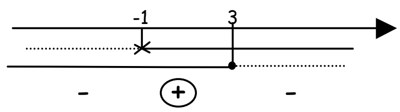
Quindi, quando la funzione è irrazionale fratta con indice *pari* devo porre il radicando maggiore o uguale a zero.

Il dominio delle funzioni algebriche irrazionali fratte con indice pari è:
$\{\forall x \in R \ / \ R(x) \geq 0\}$ dove per $R(x) \geq 0$ si intendono i valori di x che rendono positivo il radicando.

Es: Determinare il dominio della funzione: $y = \sqrt{\dfrac{3-x}{x+1}}$.

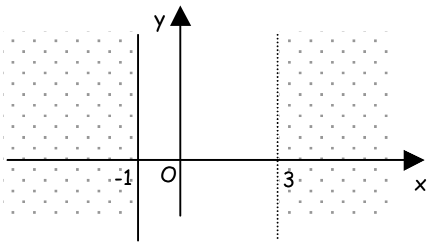
1. Pongo il radicando maggiore o uguale a zero.

$$\frac{3-x}{x+1} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3+x \leq 0 \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x > -1 \end{cases}$$



Quindi D= $\{\forall x \in R \ / \ -1 < x \leq 3\}$.

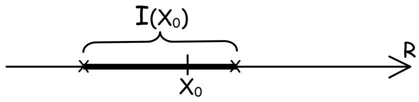
La funzione assumerà un valore y_0 per qualsiasi valore x_0 tranne che quelli compresi nella parte di piano tra x = -1 e x = 3.



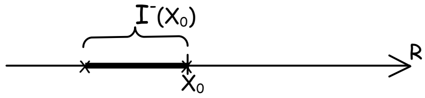
Si tracciano quindi le due rette verticali che limitano la zona e si cancella la regione compresa tra queste due rette. La funzione non attraverserà mai questa regione! La retta x=3 è tratteggiata perché 3 è un valore appartenente al dominio, mentre la retta x=-1 non è tratteggiata perché x=-1 non è valore incluso nel dominio.
La funzione non attraverserà mai questa retta.

LIMITI DI UNA FUNZIONE

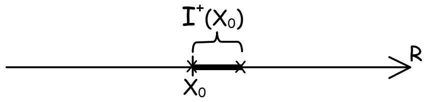
Def: Si dice **intorno** di un punto x_0
un qualunque intervallo aperto contenente x_0.



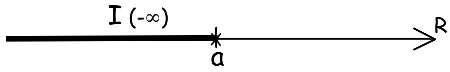
Si dice **intorno sinistro** di x_0
un qualunque intervallo aperto avente x_0 come estremo destro



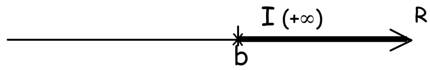
Si dice **intorno destro** di x_0
un qualunque intervallo aperto avente x_0 come estremo sinistro



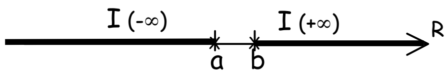
Si dice **intorno di -∞**
un qualunque intervallo illimitato del tipo] -∞; a[



Si dice **intorno di +∞**
un qualunque intervallo illimitato del tipo]b; +∞[



Si dice **intorno di ∞** l'unione di un intorno di - ∞
e di un intorno di +∞

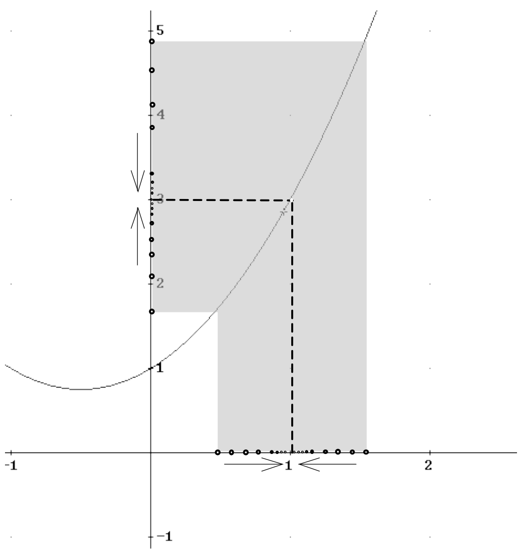


1. LIMITE FINITO IN UN PUNTO FINITO

Consideriamo ora la funzione $y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ avente come dominio: $\{\forall \in R \ / \ x \neq 1\}$.
x=1 è un valore che non posso attribuire a x perché non mi permette di trovare un valore reale di y.
Allora mi domando: cosa succede alla funzione (ovvero ai valori di y) se, considerato un intorno di x=1, mi avvicino a x=1 da destra e da sinistra?
Sostituiamo allora dei valori costruendo la tabella:

x	y
0,5	1,75
0,6	1,96
0,7	2,19
0,8	2,44
0,85	2,57
0,9	2,71
0,95	2,853
0,96	2,882
0,97	2,911
0,98	2,940
0,99	2,970
0,999	2,9970
0,9999	2,9997

1^- 3



x	y
1,5	4,75
1,4	4,36
1,3	3,99
1,2	3,64
1,15	3,47
1,1	3,31
1,05	3,153
1,04	3,122
1,03	3,091
1,02	3,060
1,01	3,030
1,001	3,0030
1,0001	3,0003

1^+ 3

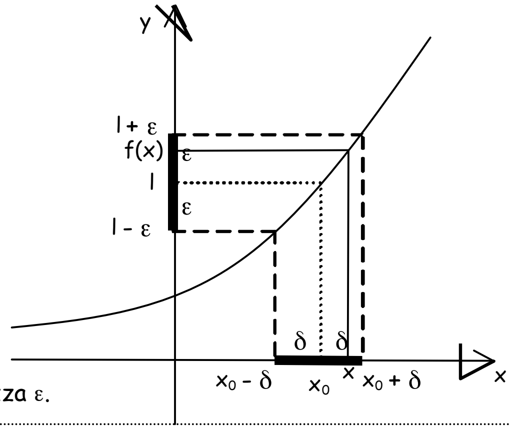
Succede che, al tendere di x a 1, i corrispondenti valori di y tendono a 3. Quindi se considero un intorno di x=1 ad esso corrisponderà un intorno di y = 3 tale che, preso un qualsiasi valore di x_0 molto vicino a 1, quindi nell'intorno di 1, il corrispondente valore $y_0=f(x_0)$ sarà molto prossimo a y = 3, quindi nell'intorno di 3.
Posso pensare di rendere piccola a piacere l'ampiezza dell'intorno di y=3: che cosa succede all'intorno corrispondente di x=1? Si restringerà anch'esso sempre più, ma al suo interno ci saranno sempre infiniti punti che corrispondono ad altri infiniti punti nell'intorno di y=3.

Si dice quindi che: $\lim_{x\to 1^{\pm}} f(x) = 3$

🕮 DEFINIZIONE DI LIMITE FINITO (l) IN UN PUNTO FINITO (x_0)

Data una funzione y = f(x), si dice che $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = l}$, con $l \in R$, <u>se e solo se</u>

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall\varepsilon > 0, \text{ piccolo a piacere, } \exists\,\delta \text{ tale che} \\ \forall x\in\,]x_0 - \delta;\ x_0 + \delta[\\ \text{si ha che:} \\ l - \varepsilon \le f(x) \le l + \varepsilon\end{array}}$$



Ovvero:
comunque si scelga un numero positivo ε, piccolo a piacere,
si può determinare, in corrispondenza a esso,
un intorno completo di x_0 tale che, per ogni x di tale intorno
(escluso al massimo x_0) si ha che f(x) apparterrà all'intorno di l di ampiezza ε.

Per determinare il limite di una funzione per x che tende a un valore x_0 non si procede numericamente sostituendo valori sempre più prossimi(per eccesso o per difetto) a x_0 ma si "sostituisce" il valore di x nella funzione e si calcola il corrispondente valore di y.

✍ Es: $\lim_{x\to 2} x^2 - 5 = 4 - 5 = -1$ ovvero, per x che tende a 2, la funzione tende a –1

$\lim_{x\to 0} \frac{2-x}{x-1} = -2$ ovvero, per x che tende a 0, la funzione tende a –2

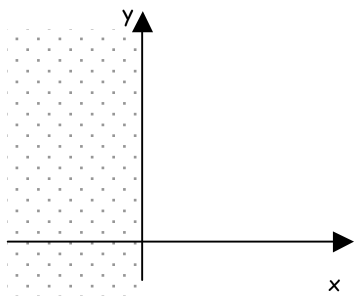
Ma cosa succede se x_0 non appartiene al dominio della funzione?

✍ Es: $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = ?$ ovvero, per x che tende a 1 a che cosa tende la funzione? Il dominio della funzione $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ è $\{\forall\in R \ / \ x\neq 1\}$ quindi non è lecito sostituire 1 alla variabile x perché non si può determinare il corrispondente valore di y reale. Infatti se risolviamo questo limite come il precedente troviamo:

$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{0}{0}$ ovvero una **forma indeterminata**. Per risolvere questo tipo di forma indeterminata basta <u>fattorizzare la funzione e semplificare i fattori comuni</u>:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{per } x\to 1 \text{ si ha che } y\to 2 .$$

Quindi:
se nel calcolo di un limite si ottiene la forma indeterminata 0/0 si <u>fattorizza la funzione e si semplificano i fattori comuni.</u>



👓 <u>Osservazione</u>: Calcolare il seguente limite: $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}$

Questo esercizio contiene un'imprecisione: il dominio della funzione $y = \sqrt{x}$ è: $\{\forall\in R \ / \ x\geq 0\}$.
Allora non posso tendere a 0 sull'asse x da sinistra perché a sinistra di x = 0 la funzione non esiste. Sarà allora opportuno parlare di **limite destro**: $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$

2. LIMITE INFINITO IN UN PUNTO FINITO

Consideriamo ora la funzione $y = \dfrac{x}{x-1}$ avente come dominio: $\{\forall \in R \;/\; x \neq 1\}$.

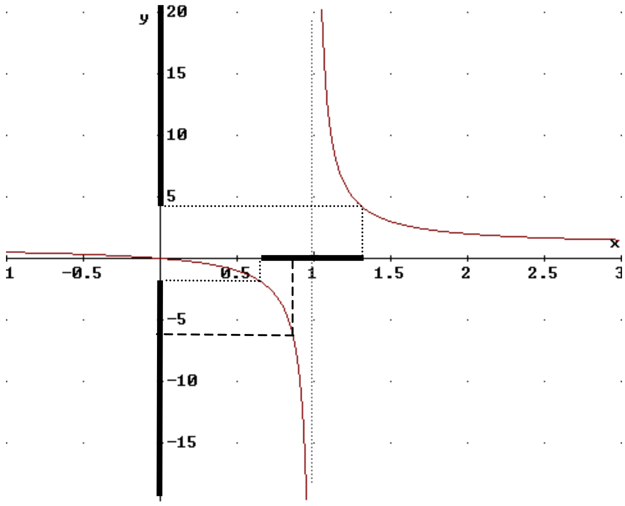
x=1 è un valore che non posso sostituire alla x perché non mi permette di trovare un valore reale di y.

Allora mi domando: cosa succede alla funzione (ovvero ai valori di y) se, considerato un intorno di x=1, mi avvicino a x=1 da destra e da sinistra?

Sostituiamo allora dei valori costruendo la tabella:

x	y
0,5	-1,0
0,6	-1,5
0,7	-2,3
0,8	-4,0
0,85	-5,7
0,9	-9,0
0,95	-19,0
0,96	-24,0
0,97	-32,3
0,98	-49,0
0,99	-99,0
0,999	-999,0
0,9999	-9999,0

1^- $-\infty$



x	y
1,5	3,0
1,4	3,5
1,3	4,3
1,2	6,0
1,15	7,7
1,1	11,0
1,05	21,0
1,04	26,0
1,03	34,3
1,02	51,0
1,01	101,0
1,001	1001,0
1,0001	10001,0

1^+ $+\infty$

Succede che,

- al tendere di $x \to 1$ da sinistra ($x \to 1^-$), i corrispondenti valori di y tendono a valori sempre più grandi ma negativi ovvero $y \to -\infty$.
- al tendere di $x \to 1$ da destra ($x \to 1^+$), i corrispondenti valori di y tendono a valori sempre più grandi e positivi ovvero $y \to +\infty$.

Quindi se considero un intorno di x=1 ad esso corrisponderà un intorno di infinito tale che, preso un qualsiasi valore di x_0 molto vicino a 1, quindi nell'intorno di 1, il corrispondente valore $y_0=f(x_0)$ sarà o nell'intorno di $+\infty$ o nell'intorno di $-\infty$.

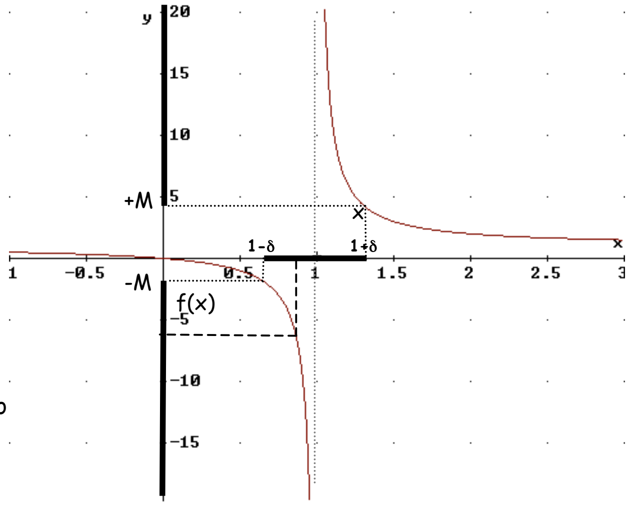
Quindi

$$\lim_{x \to 1^+} f = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^-} f = -\infty$$

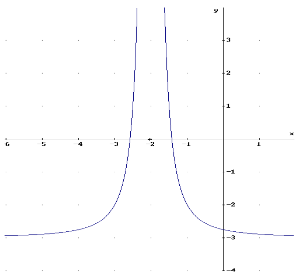
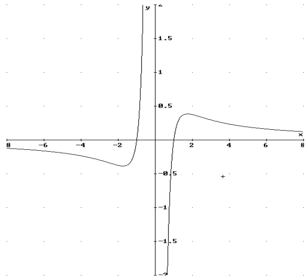
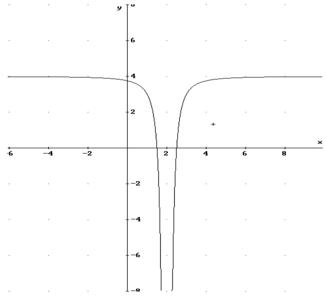
🕮 DEFINIZIONE DI LIMITE INFINITO IN UN PUNTO FINITO

Data una funzione y = f(x), si dice che $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty,}$ se

$$\boxed{\begin{gathered}\forall M > 0, \text{ grande a piacere, } \exists\, \delta \text{ tale che} \\ \forall x \in]x_0 - \delta;\ x_0 + \delta[\\ \text{si ha che:} \\ f(x) > M \text{ o } f(x) < -M\end{gathered}}$$



Ovvero:
comunque si scelga un numero positivo M, grande a piacere,
si può determinare, in corrispondenza a esso, un intorno completo
tale che, per ogni x di tale intorno (escluso al massimo x_0)
si ha che f(x) sarà maggiore di M o minore di –M

Esempi:

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to \_\_\_\_} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \_\_\_\_$ $\lim\limits_{x\to \_\_\_\_} f(x) = -\infty$

Per determinare il limite di una funzione per x che tende a un valore x_0 non si procede numericamente sostituendo valori sempre più prossimi(per eccesso o per difetto) a x_0 ma si "sostituisce" il valore di x nella funzione e si calcola il corrispondente valore di y.

✍ $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-4}{x-3} = \dfrac{-4}{0} = \infty$

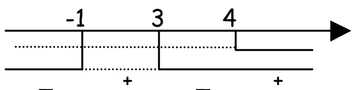
✍ $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x+2} = \dfrac{0}{0}$ **forma indeterminata**; per risolverla, devo <u>scomporre</u> il <u>numeratore</u> e il <u>denominatore</u> per poi <u>semplificare</u> il fattore comune.

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{(x+2)^2} = \lim_{x\to -2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)^2} = \lim_{x\to -2} \frac{x-2}{x+2} = \frac{-4}{0} = \infty$$

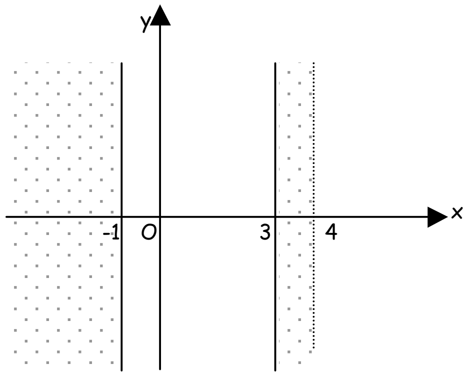
✍ Calcolare i limiti della funzione y = $\sqrt{\dfrac{x-4}{x^2-2x-3}}$ nei suoi punti esclusi dal dominio.

1. Determino di dominio della funzione:

$$\frac{x-4}{x^2-2x-3} \ge 0 \qquad \begin{cases} x-4 \ge 0 \\ x^2-2x-3 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \ge 4 \\ x < -1,\ x > 3 \end{cases}$$



D={∀x∈R/ -1 < x < 3 e x ≥ 4}



2. Determino i limiti per x→-1⁺ , x→3⁻

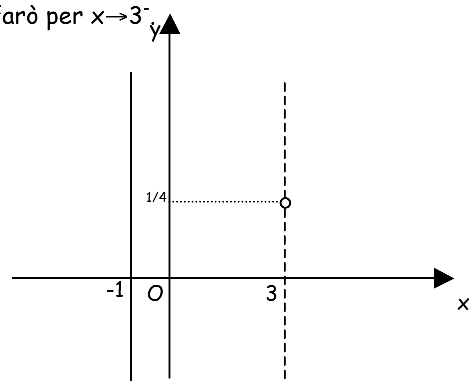
♦ $\lim\limits_{x\to -1^+} \sqrt{\dfrac{x-4}{x^2-2x-3}} = \sqrt{\dfrac{-1-4}{1+2-3}} = \sqrt{\dfrac{-5}{0}} = \infty$

♦ $\lim\limits_{x\to 3^-} \sqrt{\dfrac{x-4}{x^2-2x-3}} = \sqrt{\dfrac{3-4}{9-6-3}} = \sqrt{\dfrac{-1}{0}} = \infty$

Come si rappresentano i limiti su grafico?

Se per $x\to -1^+$ la funzione tende a ∞, allora faccio un trattino verticale accanto all'asintoto (sia in alto che in basso perché non so ancora se la funzione tenderà a +∞ o a -∞). Analogamente farò per $x\to 3^-$.

✍ Calcolare i limiti della funzione y = $\dfrac{x-3}{x^2-2x-3}$ nei suoi punti esclusi dal dominio.



1. Determino di dominio della funzione: D={∀x∈R/ x ≠ -1 e x ≠ 3}
2. Determino i limiti per x→-1 , x→3

♦ $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x-3}{x^2-2x-3} = \dfrac{-1-3}{1+2-3} = \dfrac{-4}{0} = \infty$

♦ $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-2x-3} = \dfrac{-3-3}{1+2-3} = \dfrac{0}{0}$ per risolvere la forma indeterminata

fattorizzo e semplifico: $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{(x-3)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{(x+1)} = \dfrac{1}{4}$

3. LIMITE INFINITO ALL'INFINITO

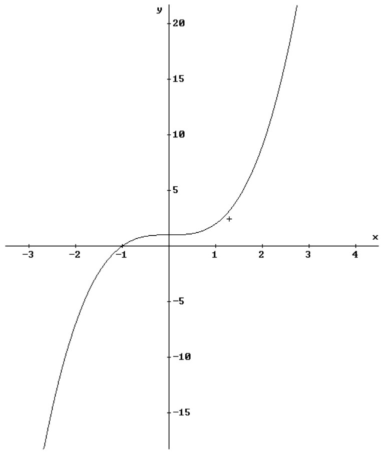
Consideriamo ora la funzione $y = x^3 + 1$.

Cosa succede alla funzione (ovvero ai valori di y) se considero valori di x sempre più grandi o sempre più piccoli?

Sostituiamo allora dei valori costruendo la tabella:

x	y
10	1001
20	8001
30	27001
40	64001
50	125001
100	1000001
1000	1000000001
10000	1E+12

+∞ +∞



x	y
-10	-999
-20	-7999
-30	-26999
-40	-63999
-50	-124999
-100	-999999
-1000	-999999999
-10000	-1E+12

-∞ -∞

Succede che,

- al tendere di x →+∞ i corrispondenti valori di y tendono a valori sempre più grandi e positivi ovvero y →+∞.
- al tendere di x →-∞ i corrispondenti valori di y tendono a valori negativi sempre più grandi ovvero y →-∞.

Quindi se considero un intorno di infinito sull'asse y ad esso corrisponderà un intorno di infinito sull'asse x tale che, preso un qualsiasi valore di x molto grande (o molto piccolo), quindi nell'intorno di infinito che ho trovato, il corrispondente valore $y_0=f(x_0)$ sarà o nell'intorno di +∞ o nell'intorno di -∞.

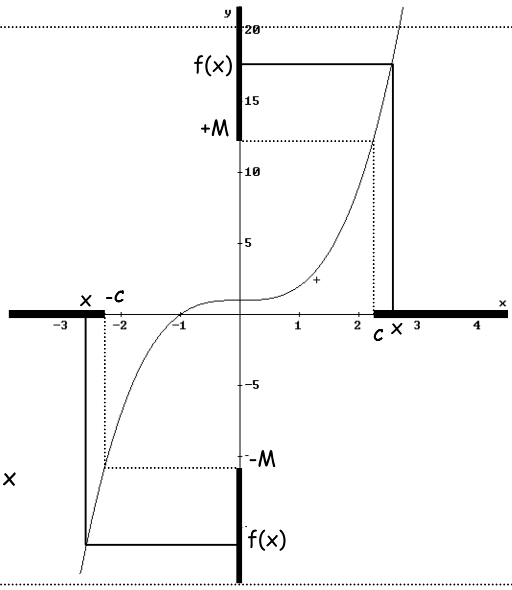
Quindi: $\lim_{x\to+\infty} f = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f = -\infty$

🕮 DEFINIZIONE DI LIMITE INFINITO ALL'INFINITO

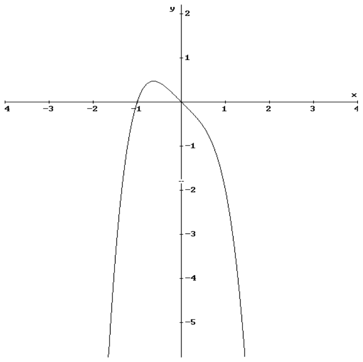
Data una funzione y = f(x), si dice che $\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \,,}$ se

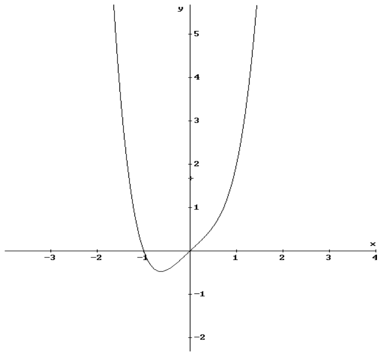
$$\boxed{\begin{gathered}\forall M > 0,\ \text{grande a piacere},\ \exists\, I(\infty) \,/\\ \forall x \in I(\infty)\\ \text{si ha che:}\\ f(x) > M \text{ o } f(x) < -M\end{gathered}}$$

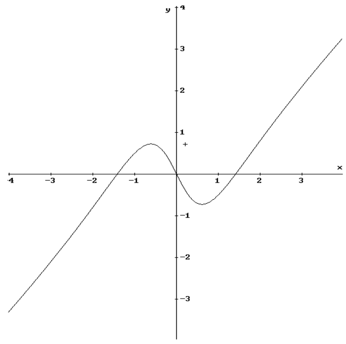
Ovvero:
comunque si scelga un numero positivo M, grande a piacere,
si può determinare, in corrispondenza a esso, un intorno di infinito sull'asse x
tale che, per ogni x appartenente a tale intorno
si ha che f(x) sarà maggiore di M o minore di –M



Ovviamente non e' detto che se x →+∞ anche y →+∞ ; infatti dai grafici che seguono potrai verificare diverse situazioni:







Esempi:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ ____

$\lim_{x \to \_\_\_} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$ ____

$\lim_{x \to \_\_\_\_} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to \_\_\_\_} f(x) = +\infty$

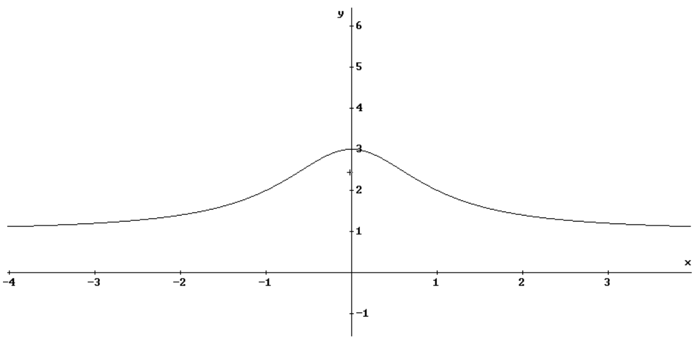
4. LIMITE FINITO ALL'INFINITO

Consideriamo ora la funzione $y = \dfrac{x^2+3}{x^2+1}$ avente come dominio: {∀∈ R}.

Cosa succede alla funzione (ovvero ai valori di y) se considero valori di x sempre più grandi o sempre più piccoli?

Sostituiamo allora dei valori costruendo la tabella:

x	y
2	1,4
3	1,2
4	1,1176
5	1,0769
10	1,0198
20	1,0050
30	1,0022
40	1,0012
50	1,0008
60	1,0006
70	1,0004
80	1,0003
100	1,0002
+∞	**1**



x	y
-2	1,4
-3	1,2
-4	1,1176
-5	1,0769
-10	1,0198
-20	1,0050
-30	1,0022
-40	1,0012
-50	1,0008
-60	1,0006
-70	1,0004
-80	1,0003
-100	1,0002
-∞	**1**

Succede che, al tendere di $x \to \pm\infty$, i corrispondenti valori di y tendono → 1. Quindi se considero un intorno di $x = \pm\infty$, ad esso corrisponderà un intorno di y = 1 tale che, preso un qualsiasi valore di x_0 molto grande o molto piccolo (nell'intorno di ∞), il corrispondente valore $y_0 = f(x_0)$ sarà molto prossimo a y = 1, quindi nell'intorno di 1.

Posso pensare di rendere sempre più piccolo l'intorno di y = 1: che cosa succede all'intorno corrispondente di ∞? Si restringerà anch'esso sempre più, ma ci saranno sempre infiniti punti che corrispondono ad altri infiniti punti nell'intorno di y=1.

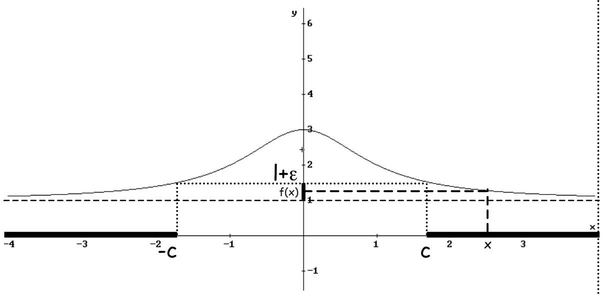
Si dice quindi che: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

DEFINIZIONE DI LIMITE FINITO ALL'INFINITO

Data una funzione y = f(x), si dice che $\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l,}$ con $l \in R$, <u>se e solo se</u>

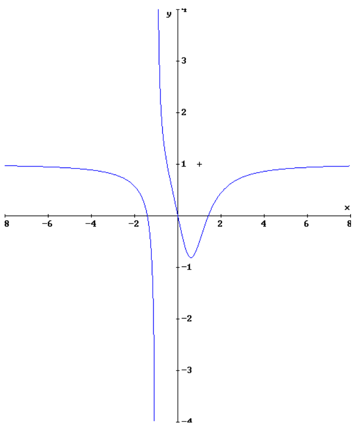
$$\boxed{\begin{gathered}\forall\varepsilon > 0\text{, piccolo a piacere, } \exists\, I(\infty) \;/\; \forall x \in I(\infty)\\ \text{si ha che:}\\ l - \varepsilon \le f(x) \le l + \varepsilon\end{gathered}}$$

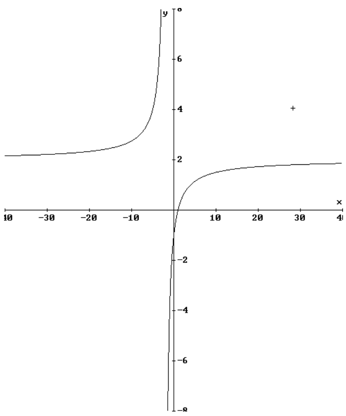
Ovvero:
comunque si scelga un numero positivo ε, piccolo a piacere,
si può determinare, in corrispondenza a esso,
un intorno completo di ∞ tale che, per ogni x di tale intorno
si ha che f(x) apparterrà all'intorno di l di ampiezza ε.

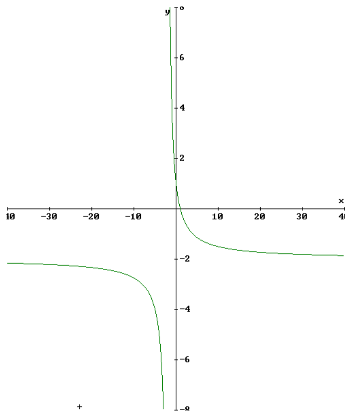


Nella figura l'intorno di 1 è soltanto destro perché la funzione è sopra l'asintoto

Dai grafici che seguono potrai verificare diverse situazioni in cui $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l$:







Esempi:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \_\_\_$

$\lim_{x\to\_\_\_} f(x) = 2$

$\lim_{x\to\_\_\_} f(x) = \_\_\_\_$

$\lim_{x\to\_\_\_} f(x) = \_\_\_\_$

$\lim_{x\to\_\_\_} f(x) = \_\_\_\_$

Se per una funzione è vero che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l$ allora la retta di equazione y = l è **l'asintoto orizzontale.**

🕮 TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE

Se, per x che tende a x_0, una funzione y = f(x) ha per limite l, allora tale limite è unico.

OPERAZIONI SUI LIMITI

Le proprietà che sono enunciate valgono sia per $x \to x_0$ che per $x \to \infty$

1. Il limite di una somma (differenza) di due funzioni è la somma (differenza) dei loro limiti
   Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = m \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = l + m$
2. Il limite di un prodotto di due funzioni è il prodotto dei loro limiti
   Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = m \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = l \cdot m$
3. Il limite di un quoziente di due funzioni è il quoziente dei loro limiti
   Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = m \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{l}{m}$
4. Il limite della radice di una funzione è la radice del limite della funzione stessa
   Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to x_0} f(x)} = \sqrt{l}$

Esempi:

1. $\lim_{x\to 3}(x^2 - 3x + \frac{1}{x}) = \lim_{x\to 3} x^2 - \lim_{x\to 3} 3x + \lim_{x\to 3} \frac{1}{x} = 9 - 9 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$
2. $\lim_{x\to -2}(x^3 + 1)\cdot(\frac{1}{x+1}) = \lim_{x\to -2}(x^3 + 1)\cdot \lim_{x\to -2}(\frac{1}{x+1}) = (-8+1)(\frac{1}{-2+1}) = (-7)\cdot(-1) = 7$
3. $\lim_{x\to 1} \frac{1+2x}{x^2} = \frac{\lim_{x\to 1}(1+2x)}{\lim_{x\to 1} x^2} = \frac{1+2}{1} = 3$
4. $\lim_{x\to 1} \sqrt{2x + 3x^2} = \sqrt{\lim_{x\to 1}(2x + 3x^2)} = \sqrt{2+3} = \sqrt{5}$

quindi, applicando le proprietà si ha che:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1+3x}{2x}} - 4x^2 = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1+3x}{2x}} - \lim_{x\to\infty} 4x^2 = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{1+3x}{2x}} - \lim_{x\to\infty} 4x^2 = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{x(\frac{1}{x} + \frac{3x}{x})}{2x}} - \lim_{x\to\infty} 4x^2 =$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{(\frac{1}{x} + 3)}{2}} - \lim_{x\to\infty} 4x^2 = \sqrt{\frac{3}{2}} - \infty = -\infty$$

✍ Esercizi.

* $\lim_{x\to+\infty} x^2 = (+\infty)^2 = +\infty$
* $\lim_{x\to-\infty} x^2 = (-\infty)^2 = +\infty$
* $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{(+\infty)^2} = \frac{3}{+\infty} = 0$
* $\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{(-\infty)^3} = \frac{3}{-\infty} = 0$
* $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(-\infty)^3}{-5} = \frac{-\infty}{-5} = +\infty$
* $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{-5x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(-\infty)^3}{-5(-\infty)^3} = \frac{\infty}{\infty}$ **forma indeterminata**! Ma osservando la funzione vedo che posso semplificare :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{-5x^3} = -\frac{1}{5}$$

Di fronte ad un polinomio di raccogliere il termine di grado massimo.

❖ $\lim_{x\to+\infty} x^2+4x+1 = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = (+\infty)^2\cdot\left(1+\frac{4}{+\infty}+\frac{1}{+\infty}\right) = +\infty\cdot 1 = +\infty$

❖ $\lim_{x\to-\infty} x^3+4x^2+1 = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(\frac{x^3}{x^3}+\frac{4x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^3}\right) = (-\infty)^3\cdot\left(1+\frac{4}{-\infty}+\frac{1}{(-\infty)^3}\right) = -\infty\cdot 1 = -\infty$

❖ $\lim_{x\to+\infty} 1-4x^5 = \lim_{x\to+\infty} x^5\left(\frac{1}{x^5}-\frac{4x^5}{x^5}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^5\left(\frac{1}{x^5}-4\right) = (+\infty)^5\cdot(0-4) = +\infty\cdot(-4) = -\infty$

Ora presta attenzione ai 3 casi che seguono.

$\lim_{x\to\infty}\frac{1-2x}{x^2} = \frac{\infty}{\infty}$ forma indeterminata! Per sciogliere l'indeterminazione devo procedere come ho fatto per i polinomi sopra riportati: raccogliere a numeratore e a denominatore i termini di grado massimo:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-2x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\frac{1}{x}-\frac{2x}{x}\right)}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}-2\right)}{x} = \frac{\left(\frac{1}{\infty}-2\right)}{\infty} = \frac{0-2}{\infty} = 0$$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-2x^4+1}{x^3+4x} = \frac{\infty}{\infty}$ forma indeterminata

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4\left(\frac{3x}{x^4}-\frac{2x^4}{x^4}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^3\left(\frac{x^3}{x^3}+\frac{4x}{x^3}\right)} \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\frac{3}{x^3}-2+\frac{1}{x^4}\right)}{\left(1+\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{(-\infty)(0-2+0)}{(1+0)} = +\infty$$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+3}{x^3+1} = \frac{\infty}{\infty}$ forma indeterminata:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(\frac{x^3}{x^3}+\frac{3}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

Dai 3 casi sopra riportati, prova a trovare una regola generale per calcolare $\lim_{x\to\infty}\frac{N(x)}{D(x)} =$

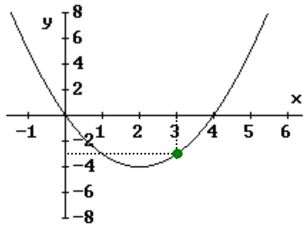
...

...

...

CONTINUITA' DI UNA FUNZIONE

Consideriamo la funzione y = $x^2 - 4x$ e calcoliamo f(3) e $\lim_{x \to 3} f(x)$:

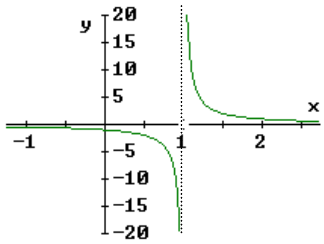


- f(3) = $3^2 - 4 \cdot 3 = 9 - 12 = -3$
- $\lim_{x \to 3} x^2 - 4x = 9 - 12 = -3$

Si può notare che f(3) = $\lim_{x \to 3} f(x)$=-3.

Ma non è sempre così! Infatti:

Consideriamo ora la funzione y = $\dfrac{1}{x-1}$ e calcoliamo f(1) e $\lim_{x \to 1} f(x)$



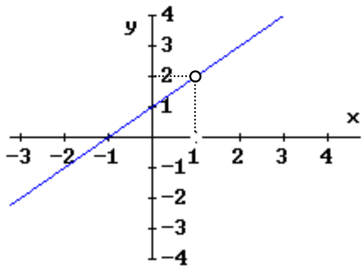
- f(1) non si può calcolare perché x=1 non appartiene al dominio della funzione
- $\lim_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1} = \infty$

E' ovvio ora che f(1) non è uguale a $\lim_{x \to 1} f(x)$.

Analogamente, se consideriamo la funzione y=$\dfrac{x^2-1}{x-1}$ e calcoliamo f(1) e $\lim_{x \to 1} f(x)$ troviamo che:

- f(1) non si può calcolare perché x=1 non appartiene al dominio della funzione
- $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \dfrac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2$

Si può notare che f(1) $\neq$ $\lim_{x \to 1} f(x)$.



Concludendo:

Definizione:
Una funzione si dice **continua in un punto** x_0 se esiste finito il limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ed è uguale al valore della funzione calcolato in x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ovvero, volendo specificare il limite sinistro e destro: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Definizione:
Una funzione si dice **continua in un intervallo** se è continua in ogni punto dell'intervallo.

FUNZIONI DISCONTINUE

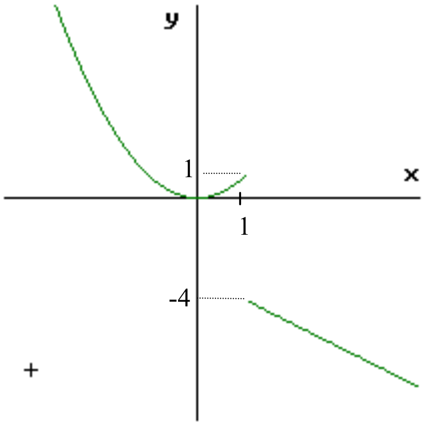
Una funzione che non è continua in un punto x_0 si dice DISCONTINUA in x_0.
Se in un intervallo [a,b] esiste almeno un punto in cui la funzione è discontinua, essa si dice "discontinua nell'intervallo [a, b]".

Vi sono 3 tipi diversi di discontinuità in x_0: essi si differenziano per il comportamento della funzione in quel punto.

DISCONTINUITÀ DI PRIMA SPECIE

La funzione è evidentemente discontinua in x = 1; infatti in tale punto essa "salta" da y =1 e y = -4.

Si dice che la funzione fa un "salto".



Ricordando che una funzione è continua se:

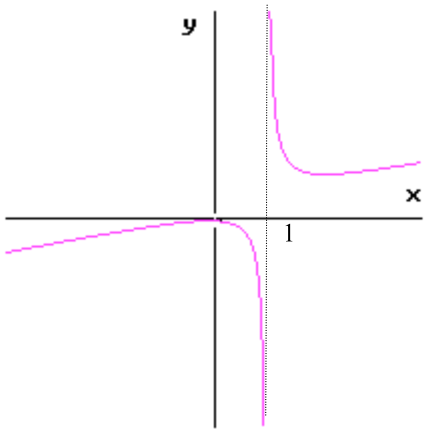
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

in questo caso si ha che: $\lim_{x \to 1^-} f = 1$ e $\lim_{x \to 1^+} f = -4$

Quindi poichè $\lim_{x \to 1^-} f \neq \lim_{x \to 1^+} f \Rightarrow$ la funzione è discontinua

DISCONTINUITÀ DI SECONDA SPECIE

La funzione è evidentemente discontinua in x = 1; infatti in tale punto essa possiede un asintoto verticale e il suo dominio è: $\{\forall x \in R / x \neq 1\}$



Ciò significa che la funzione verifica la condizione:

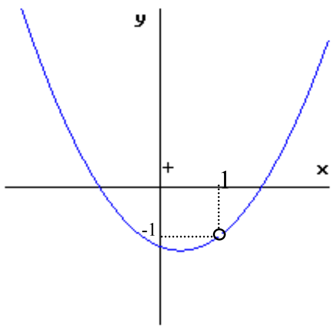
$$\lim_{x \to 1} f = \infty$$

Ricordando che una funzione è continua in x_0 se esiste finito il limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$, allora in x_0 = 1 la funzione non è continua.

Quindi poichè $\lim_{x \to x_0} f = \infty \Rightarrow$ la funzione è discontinua

DISCONTINUITÀ DI TERZA SPECIE

Consideriamo la funzione in figura. Essa possiede un "buco" nel punto di coordinate (1; -1) poiché il suo dominio è $\{\forall x \in R / x \neq 1\}$



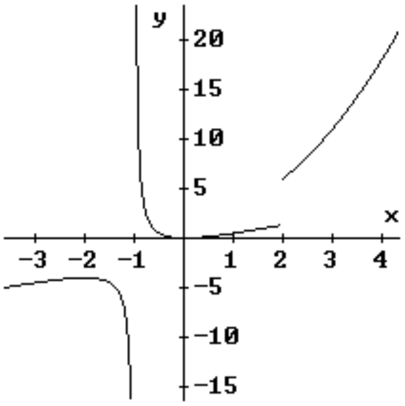
Quindi f(1) non esiste.

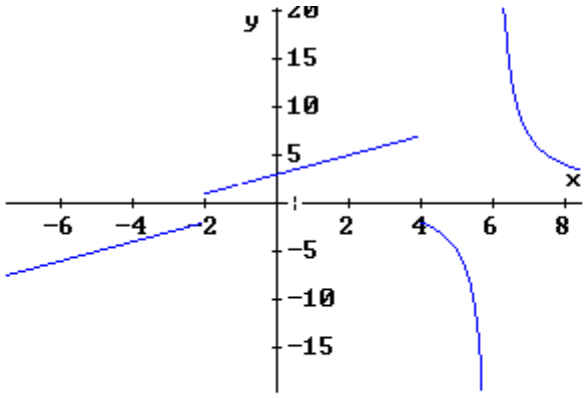
Se ricerchiamo il limite destro e il limite sinistro di questa funzione per x che tende a 1 troviamo che:
$\lim_{x \to 1^-} f = -1$ e $\lim_{x \to 1^+} f = -1$
quindi possiamo dire che $\lim_{x \to 1} f = -1$.

Ricordando che una funzione si dice continua in un punto x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ e

poiché non esiste $f(x_0)$ allora la funzione è discontinua.

Riconosci le discontinuità di queste funzioni.





In quali punti la funzione y= $\dfrac{x+3}{x^2-9}$ è discontinua? Che tipo di discontinuità possiede?

In quali punti la funzione y= $\dfrac{x^2+9}{x-3}$ è discontinua? Che tipo di discontinuità possiede?

RAPPORTO INCREMENTALE DI UNA FUNZIONE

Ricorda:

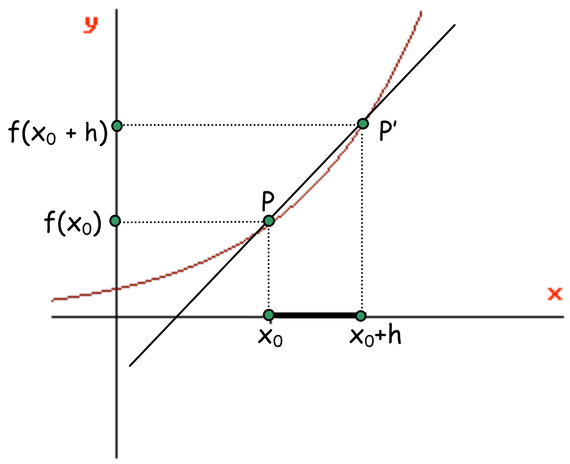
Una retta che passa per i punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ ha coefficiente angolare $m = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$

Se m > 0 la retta è crescente,
se m = 0 la retta è orizzontale
se m < 0 la retta è decrescente
se $m \to \infty$ la retta è verticale.

Consideriamo la funzione y = f(x) in figura e un suo qualunque punto $P(x_0, f(x_0))$.

Sia P' il punto del grafico di y = f(x) ottenuto aumentando di un numero positivo h, piccolo a piacere, l'ascissa x_0 di P.
Le coordinate di P' saranno:
$x_{P'} = x_0 + h$
$y_{P'} = f(x_0 + h)$

ossia $P'(x_0 + h, f(x_0 + h))$.



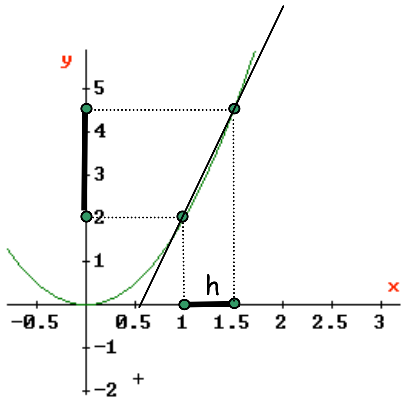
La retta secante PP' ha **coefficiente angolare**:

$$\mathbf{m} = \frac{y_{P'} - y_P}{x_{P'} - x_P} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \boxed{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

Tale numero si chiama **rapporto incrementale della funzione y = f(x) in x_0**.

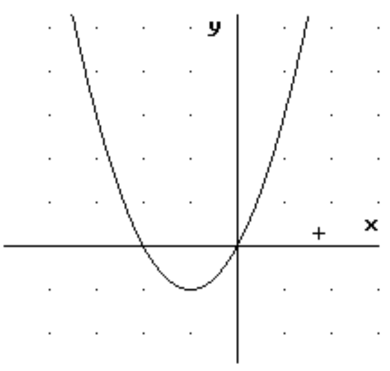
Esercizio: Calcolare il rapporto incrementale della funzione $y = 2x^2$ nel suo punto di ascissa 1.

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{2(1 + h)^2 - 2(1)^2}{h} =$$
$$= \frac{2(1 + 2h + h^2) - 2}{h} = \frac{4h + 2h^2}{h} = \frac{h(4 + 2h)}{h} = 4 + 2h$$



Esercizio: Calcolare il rapporto incrementale della funzione $y = x^2 + 2x$ nel suo punto di ascissa 2.

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \frac{((2 + h)^2 + 2(2 + h)) - (2^2 + 2 \cdot 2)}{h} =$$
$$= \frac{(4 + 4h + h^2 + 4 + 2h) - (4 + 4)}{h} = \frac{h^2 + 6h + 8 - 8}{h} = \frac{h(h + 6)}{h} = h + 6$$

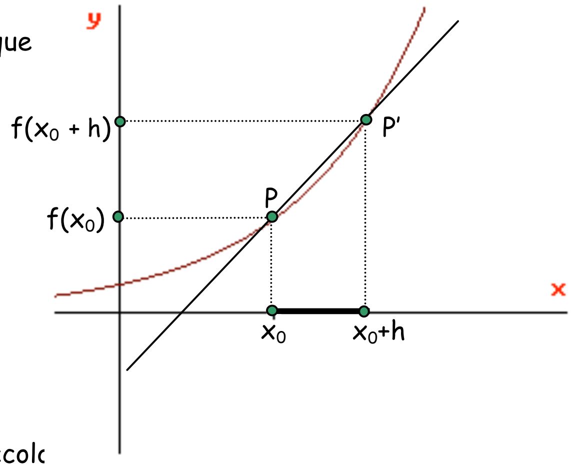


DERIVATA DI UNA FUNZIONE

Consideriamo di nuovo la funzione y = f(x) in figura e un suo qualunque punto $P(x_0, f(x_0))$.

Come già descritto nella pagina precedente, la retta secante PP' ha coefficiente angolare uguale al rapporto incrementale

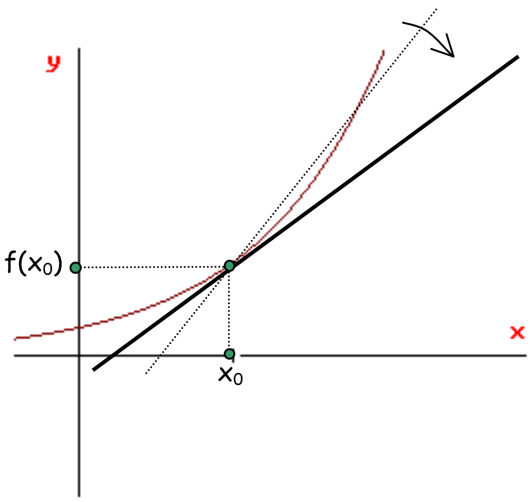
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$



Se facciamo tendere P' → P

- cosa succede all'incremento h? Esso diventa sempre più piccolo ovvero $h \to 0$
- cosa succede alla retta secante PP'? Essa tende a divenire la retta TANGENTE alla funzione y = f(x) nel punto P
- cosa diventerà il rapporto incrementale? Da coefficiente angolare della secante diventerà il coefficiente angolare della retta tangente in P a y = f(x).

$$\boxed{m_{tg} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)}$$



Si dice **DERIVATA** della funzione y = f(x) **nel punto x_0** il limite finito, per h che tende a zero, del rapporto incrementale della funzione calcolato in x_0 e si indica con $f'(x_0)$.

Il valore della derivata di una funzione in un punto x_0 rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$.

Se non calcolo la derivata in un punto specifico x_0 ma **in un qualunque punto x** troverò la **FUNZIONE DERIVATA** della funzione y = f(x) e si indica in uno dei seguenti modi:

f'(x) , Df(x), y'.

Si dice **DERIVATA** della funzione y = f(x) il limite (se esiste), per h che tende a zero, del rapporto incrementale e si indica con f'(x).

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Esercizio: Calcolare la derivata della funzione y = 2x²

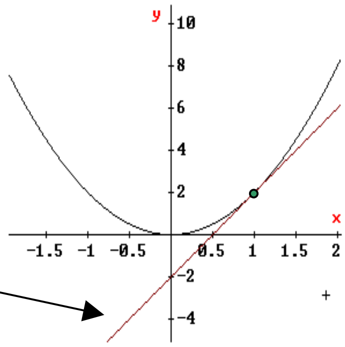
Calcolo il limite del rapporto incrementale della funzione y = $2x^2$ per h che tende a 0:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^2-2x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2(x^2+h^2+2hx)-2x^2}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2x^2+2h^2+4hx-2x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2h^2+4xh}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2h+4x)}{h} = \lim_{h\to 0} 2h+4x = 4x$$

La derivata della funzione $y = 2x^2$ è $y' = 4x$.

Esercizio: Calcolare la derivata della funzione $y = 2x^2$ in $x = 1$



La derivata della funzione $y = 2x^2$ è $y' = 4x$.

Per calcolarla in x = 1 basta sostituire x = 1 in $y' = 4x \Rightarrow$ **y'(1) = 4**.

Cosa significa? La <u>tangente</u> alla funzione $y = 2x^2$ in $x = 1$ ha <u>coefficiente angolare</u> m = 4.

CALCOLO DELLA DERIVATA DI UNA FUNZIONE

Consideriamo la funzione y = x: quale sarà la sua derivata?
Basta calcolare il limite del rapporto incrementale della funzione per h che tende a zero; se tale limite esiste ed è finito, esso sarà la derivata che cerco.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

La derivata di y = x è y' = 1

Consideriamo la funzione y = 3x + 5: quale sarà la sua derivata?
Basta calcolare il limite del rapporto incrementale della funzione per h che tende a zero; se tale limite esiste ed è finito, esso sarà la derivata che cerco.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)+5-(3x+5)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x+3h+5-3x-5}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h}=3$$

La derivata di y = 3x+5 è y' = 3

Consideriamo la funzione $y = x^2$: quale sarà la sua derivata?
Basta calcolare il limite del rapporto incrementale della funzione per h che tende a zero; se tale limite esiste ed è finito, esso sarà la derivata che cerco.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+h^2+2hx-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2hx}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(h+2x)}{h}=\lim_{h\to 0}h+2x=2x$$

La derivata di $y = x^2$ è y' = 2x

Consideriamo la funzione $y = 2x^3$: quale sarà la sua derivata?
Basta calcolare il limite del rapporto incrementale della funzione per h che tende a zero; se tale limite esiste ed è finito, esso sarà la derivata che cerco.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^3-2x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-2x^3}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2x^3+6x^2h+6xh^2+2h^3-2x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{6x^2h+6xh^2+2h^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(6x^2+6xh+2h^2)}{h}=6x^2$$

La derivata di $y = 2x^3$ è $y' = 6x^2$

Da questi esempi riusciamo a dedurre alcune regole:

Y = f(x)		Y' = f'(x)
Y = 5	⇒	Y' = 0
Y = x	⇒	Y' = 1
Y = 3x	⇒	Y' = 3
$Y = x^2$	⇒	Y' = 2x
$Y = 2x^3$	⇒	$Y' = 3\cdot 2x^2 = 6x$

In generale…

Y = f(x)		Y' = f'(x)
Y = k	⇒	**Y' = 0**
Y = x	⇒	**Y' = 1**
Y = kx	⇒	**Y' = k**
$\mathbf{Y = x^n}$	⇒	$\mathbf{Y' = nx^{n-1}}$
$\mathbf{Y = kx^n}$	⇒	$\mathbf{Y' = k\cdot nx^{n-1}}$

REGOLE DI DERIVAZIONE E APPLICAZIONI

DERIVATA DI UN POLINOMIO

Per derivare una funzione razionale intera basta sommare/sottrarre le derivate di ciascun termine del polinomio.

$y = 3x^2 - x^3 + 5x - 1 \quad \Rightarrow \quad y' = 3\cdot 2x - 3x^2 + 5 + 0 = 6x - 3x^2 + 5$

DERIVATA DI UN PRODOTTO DI DUE FUNZIONI

Per derivare un prodotto di due funzioni si applica la seguente regola:

$$\boxed{y=f(x)\cdot g(x) \quad \Rightarrow \quad y' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)}$$

$$y = (3x^2 - x)(2x-1) \quad \Rightarrow \quad y' = D(3x^2 - x)(2x-1) + (3x^2 - x)D(2x-1) = (6x-1)(2x-1) + (3x^2 - x)(2) =$$
$$y' = 12x^2 - 6x - 2x + 1 + 6x^2 - 2x = 18x^2 - 8x + 1$$

DERIVATA DI UNA FUNZIONE RAZIONALE FRATTA

Per derivare un rapporto si applica la seguente regola:

$$\boxed{y = \frac{f(x)}{g(x)} \quad y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}}$$

$$y = \frac{2x^2-1}{3x} \quad y' = \frac{D(2x^2-1)(3x) - (2x^2-1)D(3x)}{9x^2} = \frac{4x\cdot 3x - (2x^2-1)3}{9x^2} = \frac{12x^2 - 6x^2 + 3}{9x^2} = \frac{6x^2+3}{9x^2}$$

DERIVATA DI UNA FUNZIONE IRRAZIONALE CON INDICE 2

La radice con indice n si può trasformare in potenza frazionaria e si può derivare utilizzando le regole già viste per derivare $y = x^n$.

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$
$$y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\Rightarrow$ Quindi, la derivata di $y = \sqrt{x}$ è $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

<u>Se il radicando è una funzione (e non solo x) si applica la seguente regola:</u> $\Rightarrow$

$$y = \sqrt{R(x)} \qquad y' = \frac{R'(x)}{2\sqrt{R(x)}}$$

$y = \sqrt{2x^2+1}$ ha come derivata $y' = \frac{D(2x^2+1)}{2\sqrt{2x^2+1}} = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$

DERIVATA DI UNA FUNZIONE IRRAZIONALE CON INDICE 3

La radice con indice n si può trasformare in potenza frazionaria e si può derivare utilizzando le regole già viste per derivare $y = x^n$.

$$y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$
$$y' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$\Rightarrow$ Quindi, la derivata di $y = \sqrt[3]{x}$ è $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

<u>Se il radicando è una funzione (e non solo x) si applica la seguente regola:</u> $\Rightarrow$

$$y = \sqrt[3]{R(x)} \qquad y' = \frac{R'(x)}{3\cdot\sqrt[3]{R^2(x)}}$$

(argomento solo accennato) DERIVATA DELLE FUNZIONI COMPOSTE y=[f(x)]^n

$y=\sqrt[3]{2x^2+1}$ ha come derivata $y'=\dfrac{D(2x^2+1)}{3\cdot\sqrt[3]{(2x^2+1)^2}}=\dfrac{4x}{3\cdot\sqrt[3]{(2x^2+1)^2}}$

La derivata della potenza di una funzione $y=[f(x)]^n$ è: $\boxed{y'=n\cdot[f(x)]^{n-1}\cdot f'(x)}$

Ex: Derivare la funzione $y=(x^3-x)^4$.

Analizziamo la funzione. Devo derivare la potenza quarta di g(x)= (x^3-x); cerco g′(x) = $3x^2-1$.

La derivata sarà: $y'=4\cdot(x^3-x)^{4-1}\cdot(3x^2-1)=4\cdot(x^3-x)^3\cdot(3x^2-1)$

Ex: Derivare la funzione $y=\sqrt[4]{x^3-x}$.

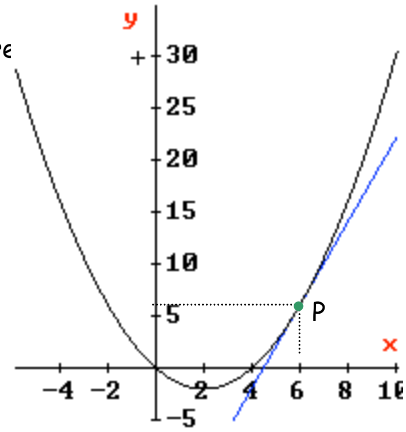
Scrivo la funzione sottoforma di potenza: $y=(x^3-x)^{\frac{1}{4}}$; cerco g′(x) = $3x^2-1$.

La derivata sarà: $y'=\dfrac{1}{4}\cdot(x^3-x)^{\frac{1}{4}-1}\cdot(3x^2-1)=\dfrac{1}{4}\cdot(x^3-x)^{-\frac{3}{4}}\cdot(3x^2-1)=$

$\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{(x^3-x)^{\frac{3}{4}}}\cdot(3x^2-1)=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{(3x^2-1)}{\sqrt[4]{(x^3-x)^3}}$

RICERCA DELLA RETTA TANGENTE A y=f(x) IN x_0

Data una funzione y = f(x) continua in un punto x_0, determinare l'equazione della re di ascissa x_0.



Ex: Determinare la retta tangente alla funzione $y=\dfrac{1}{2}x^2-2x$ in $x_0 = 6$

- Innanzitutto mi servono entrambe le coordinate di P:
  $x_P = 6$ e per trovare y_P basta sostituire nella funzione l'ascissa di P:
  $f(x_P)= y_P = \dfrac{1}{2}36-12=6$
  Quindi il punto P ha coordinate P(6; 6).

- Occorre ora conoscere la "pendenza " della retta tangente ovvero il suo coefficiente angolare m; dalla definizione di derivata calcolata in un punto x_0 ricordo che:
  il valore della derivata di una funzione in un punto x_P rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione y = f(x) nel punto di coordinate (x_p, $f(x_p)$).

  Quindi per trovare il coefficiente angolare devo:
  - determinare la derivata di y = f(x)
  - sostituire l'ascissa x_P nella funzione derivata e determino così il valore di m.

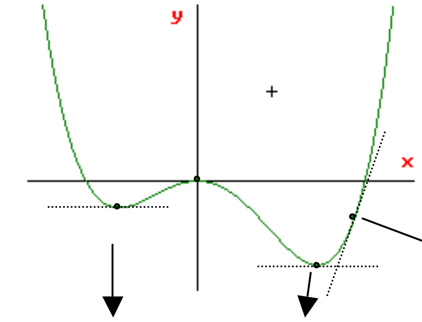
  $f'(x) = \dfrac{1}{2}\cdot 2x-2= x-2$
  ora sostituisco nella derivata la $x_P = 6$ e trovo m = 6 – 2 = 4

- Infine devo determinare l'equazione della retta tangente applicando la formula (già nota dalla terza!):

$y - y_P = m(x - x_P)$

y – 6 = 4(x – 6) ⇒ y = 4x – 24 + 6 ⇒ y = 4x - 18

PUNTI DI NON DERIVABILITA'

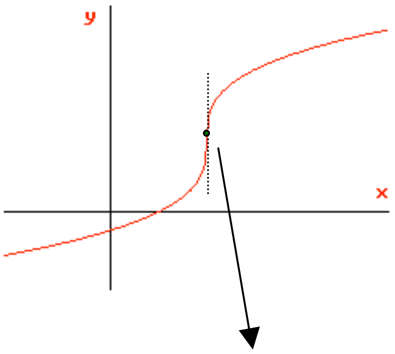


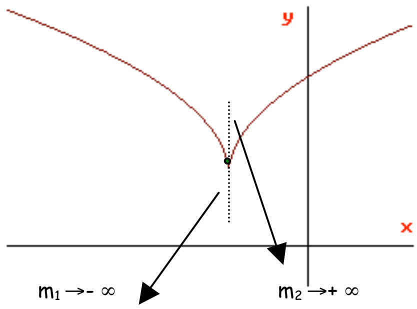
Analizziamo attentamente i grafici proposti:

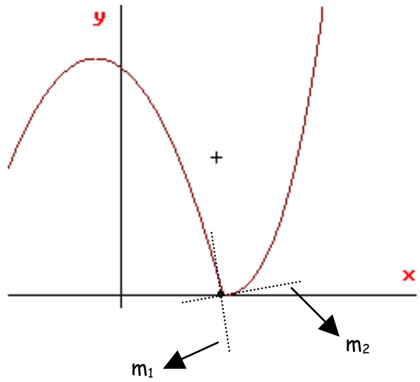
In tutti i punti esiste una sola tangente, orizzontale o obliqua.
In tutti i punti il coefficiente angolare della tangente esiste, è unico ed è finito.
In tutti i punti la funzione è DERIVABILE ovvero esiste la derivata, ed il suo valore è unico e finito.

$m = 0$ ovvero $f'(x_0) = 0 \Rightarrow$
Punto a tg. orizzontale

$m \neq 0$ ovvero $f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow$
Punto a tg. obliqua







$m \to +\infty$ ovvero $f'(x_0) \to +\infty \Rightarrow$
flesso a tg. verticale

$m_1 \neq m_2$ ma entrambi tendono all'infinito
ovvero $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0) \Rightarrow$
cuspide

$m_1 \neq m_2$ ovvero $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$
Punto angoloso

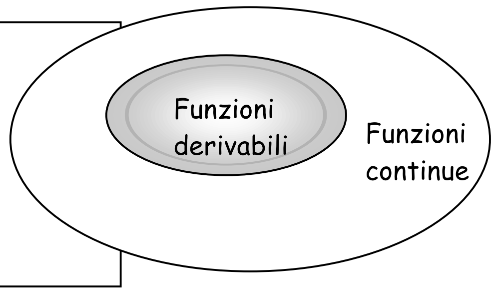
Punti di non derivabilità

In questi punti la tangente:
- è verticale $\Rightarrow$ quindi il valore della derivata in questi punti è infinito
- non è verticale ma non è unica: esiste una tangente a sinistra di x_0 e una a destra di x_0 con due coefficienti angolari diversi $\Rightarrow$ quindi il valore della derivata in questi punti non è unico ma esiste una derivata destra ed una derivata sinistra con valori differenti

In tutti questi i punti la funzione è NON E' DERIVABILE ovvero esiste la derivata ma il suo valore o tende ad infinito (cuspide o flesso a tg. verticale) o non è unico (punto angoloso).

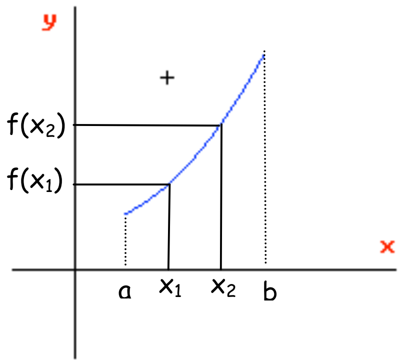
Teorema: Una funzione derivabile in tutti i suoi punti è anche continua in tutti i suoi punti, mentre una funzione continua in tutti i suoi punti non e' detto che sia ovunque derivabile.

Infatti le funzioni rappresentate sono continue (non hanno asintoti né buchi) ma non sono ovunque derivabili.

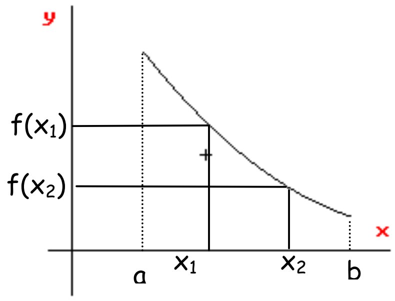


FUNZIONI CRESCENTI O DECRESCENTI

Consideriamo una funzione continua in un intervallo [a,b]; tale funzione può essere crescente o decrescente (a meno che non sia una retta orizzontale).



y = f(x) è una funzione **crescente** se
$\forall x_1, x_2 \in [a,b]$
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

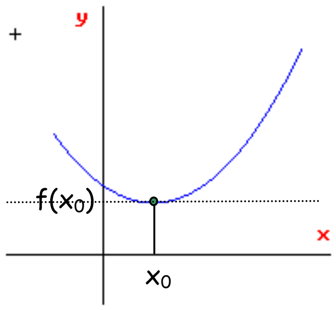


y = f(x) è una funzione **decrescente** se
$\forall x_1, x_2 \in [a,b]$
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Se una funzione è crescente in un intervallo [a,b], la retta tangente in un qualsiasi suo punto sarà anche lei crescente quindi il suo coefficiente angolare sarà positivo.
Da questo (ricordando il legame esistente tra coefficiente angolare della tangente e derivata) concludo che:
se una FUNZIONE y = f(x) è CRESCENTE in un intervallo [a,b], in tale intervallo la DERIVATA della funzione sarà POSITIVA.

Analogamente, se una funzione è decrescente in un intervallo [a,b], la retta tangente in un qualsiasi suo punto sarà anche lei decrescente quindi il suo coefficiente angolare sarà negativo.
Da questo (ricordando il legame esistente tra coefficiente angolare della tangente e derivata) concludo che:
se una FUNZIONE y = f(x) è DECRESCENTE in un intervallo [a,b], in tale intervallo la DERIVATA della funzione sarà NEGATIVA.

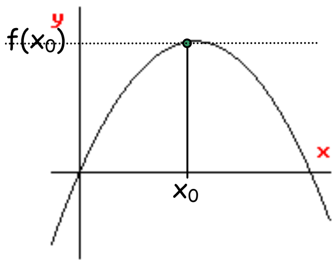
I punti dove la funzione non è né crescente, né decrescente si dicono **punti stazionari**.
Quali sono? Sono di tre tipi differenti:



PUNTO DI MINIMO

P(x₀, f(x₀)) è un punto di **minimo relativo** se:
$\forall x \in I(x_0) \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$

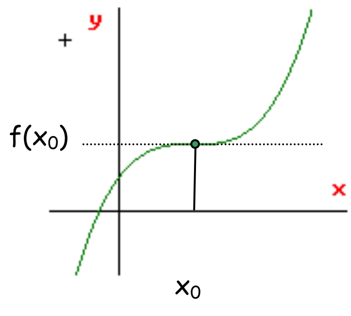
P(x₀, f(x₀)) è un punto di **minimo assoluto** se:
$\forall x \in D_f \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$



PUNTO DI MASSIMO

P(x₀, f(x₀)) è un punto di **massimo relativo** se:
$\forall x \in I(x_0) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$

P(x₀, f(x₀)) è un punto di **massimo assoluto** se:
$\forall x \in D_f \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$



PUNTO DI FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE

PUNTI A TANGENTE ORIZZONTALE

In tutti i punti analizzati nella pag. precedente, la tangente alla funzione è orizzontale e quindi si dicono anche **punti a tangente orizzontale**.
Il coefficiente angolare della retta tangente in tali punti (dato che è orizzontale) è uguale a zero.
Ricordando il legame tra tangente coefficiente angolare della retta tangente in x_0 e derivata calcolata in x_0 posso concludere:

Teorema: Data una funzione y = f(x) continua e derivabile in un intervallo [a,b], se y=f(x) ha un **massimo, un minimo o un flesso a tangente orizzontale** in x_0 allora la derivata y' = f'(x) si annulla in x_0 e si ha:

$$f'(x_0) = 0$$

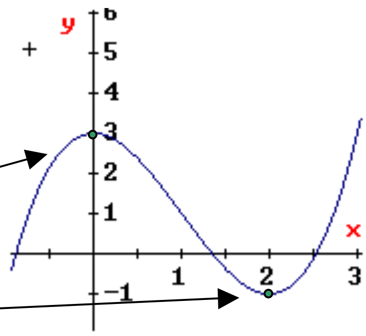
Questo teorema è utile per determinare i punti a tangente orizzontale (max. min, e flex.) di una funzione.

COME SI DETERMINANO I PUNTI A TANGENTE ORIZZONTALE?

1. Si determina la derivata prima della funzione
2. Si pone uguale a zero la derivata prima e si determinano le soluzioni x_1, x_2, …
3. Si determinano $f(x_1)$, $f(x_2)$, … sostituendo x_1, x_2, … nella funzione.

Ex. Determinare i punti a tangente orizzontale della funzione $y = x^3 - 3x^2 + 3$

1. Determino la derivata: $y' = 3x^2 - 6x$
2. Pongo la derivata prima uguale a zero:
   $$3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \quad \begin{cases} 3x = 0 \to \boxed{x = 0} \\ (x-2) = 0 \to \boxed{x = 2} \end{cases}$$
3. In x = 0 e in x = 2 la funzione possiede un massimo o un minimo o un flesso a tg. orizzontale.
4. Le coordinate di tali punti sono:
   a. X = 0 ⇒ f(0) = 0+0+3 A(0; 3)
   b. x = 2 ⇒ f(2) = 8 – 12 + 3 = -1 B(2; -1)



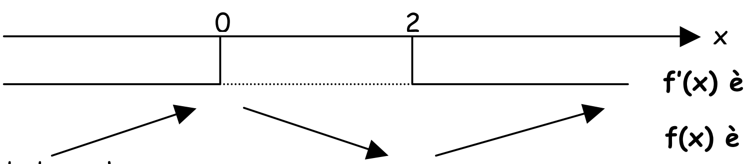
COME SI DISTINGUE UN MASSIMO DA UN MINIMO?

Occorre studiare la monotonia della funzione, ovvero dove la funzione è crescente o decrescente.
Ricordando che, una funzione è crescente se in ogni suo punto la tangente ha coefficiente angolare positivo e il coefficiente angolare della tangente è positivo in quei punti dove è positiva la derivata prima, si ha:

Una funzione è crescente nei punti dove la derivata prima è positiva ⇒ y = f(x) è crescente se f'(x)> 0
Analogamente:
Una funzione è decrescente nei punti dove la derivata prima è negativa ⇒ y = f(x) è decrescente se f'(x)<0

Ex. Determinare dove la funzione $y = x^3 - 3x^2 + 3$ è crescente/decrescente.
Determino la derivata: $y' = 3x^2 - 6x$

1. Pongo la derivata prima maggiore o uguale a zero:
   $3x^2 - 6x \geq 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0$ e $x = 2$ Costruisco lo schema grafico delle soluzioni:

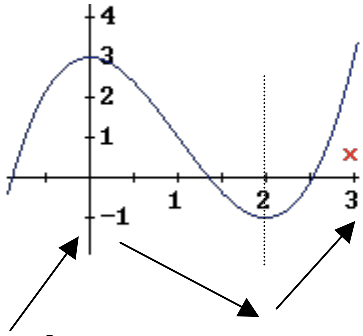


f'(x) è positiva per x < 0 e x > 2

f(x) è crescente per x < 0 e x > 2

Dallo schema deduco che:

per x < 0 e per x > 2 la <u>derivata prima è positiva quindi la funzione è crescente</u>
per 0 < x < 2 la <u>derivata prima è negativa quindi la funzione è decrescente</u>



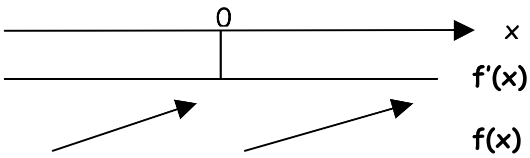
Poiché prima di x = 0 la funzione cresce e poi decresce
$\Rightarrow$ in x = 0 la funzione ha un <u>massimo</u>
Poiché prima di x = 2 la funzione decresce e poi cresce
$\Rightarrow$ in x = 0 la funzione ha un minimo

QUANDO SI HA UN FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE IN x_0?

Quando la derivata prima si annulla in x_0 ma la funzione prima di x_0 è crescente (o decrescente) e dopo x_0 continua a crescere (o decrescere).

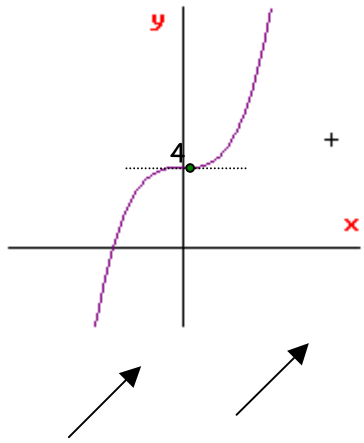
Ex. Determinare i punti a tangente orizzontale di $y = x^3 + 4$

1. Determino la derivata prima: $y' = 3x^2$
2. Pongo la derivata prima uguale a zero: $3x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$
3. Cerco f(0) sostituendo nella funzione: f(0) = 4
   $\Rightarrow$ A(0; 4) è un punto a tg. orizzontale.
4. Per capire se è un max., min. o flesso a tg. orizzontale devo porre y' $\geq$ 0:
   $3x^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; \forall x \in R$ (un numero al quadrato è sempre positivo!)
   Visualizzo graficamente:

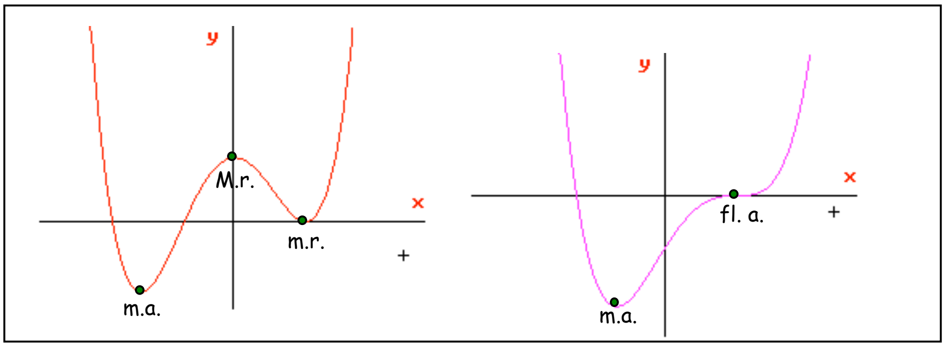


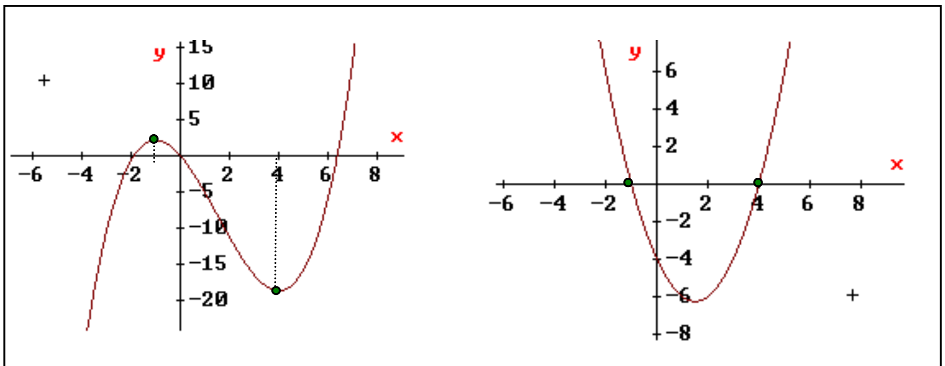
f'(x) è sempre **positiva**

f(x) è sempre crescente



5. In x = 0 la funzione ha un **flesso ascendente** (perché la funzione cresce) di coordinate A(0; 4).





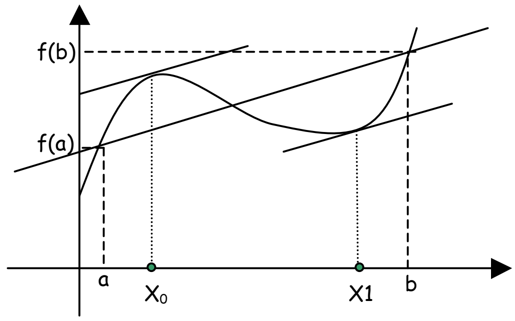
y = f(x) y' = f'(x)

Analizza il grafico della funzione e quello della sua derivata: quali corrispondenze noti?

TEOREMA DI LAGRANGE

Se una funzione è continua in un intervallo chiuso [a, b] ed è derivabile in ogni punto interno ad esso esiste <u>almeno</u> un punto x_0 interno ad esso tale che:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



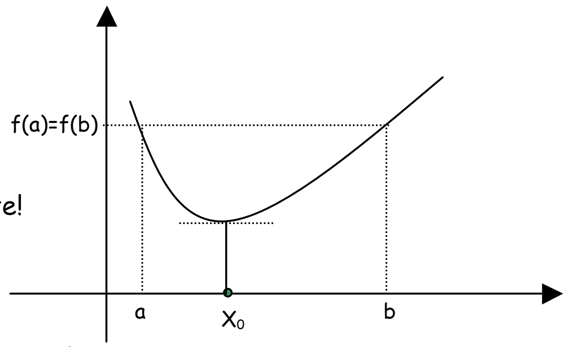
Questo teorema ha un importante significato geometrico:

- $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare della tangente alla funzione y = f(x) nel suo punto di coordinate $P(x_0, f(x_0))$
- $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ è il coefficiente angolare della retta secante la funzione e passante per $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$
- L'uguaglianza di questo due termini assicura che all'interno dell'intervallo [a, b] esiste un punto P $(x_0, f(x_0))$ tale che la tangente tracciata in P alla funzione y = f(x) è PARALLELA (ha lo stesso coefficiente angolare!) alla secante AB

TEOREMA DI ROLLE

Se una funzione è continua in un intervallo chiuso [a, b] , è derivabile in ogni punto interno ad esso e f(a) = f(b) ovvero assume lo stesso valore agli estremi dell'intervallo allora esiste <u>almeno</u> un punto x_0 interno ad esso tale che:

$$f'(x_0) = 0$$



Anche questo teorema ha un importante significato geometrico:
esso assicura l'esistenza di almeno un punto di massimo o di minimo (a tangente orizzontale) all'interno dell'intervallo [a, b].
Ma attenzione: non ci permette di trovare dov'è, ci dice solo che esiste!

TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

Siano y = f(x) e y = g(x) sono due funzioni

- continue in un intervallo chiuso [a, b],
- derivabili in ogni punto interno ad esso, escluso al più il punto x_0
- tale che $g'(x) \neq 0$ per ogni punto di questo intervallo

se $f(x_0) = 0$ e $g(x_0) = 0$ allora: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ oppure

se $f(x_0) \to \infty$ e $g(x_0) \to \infty$ allora: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

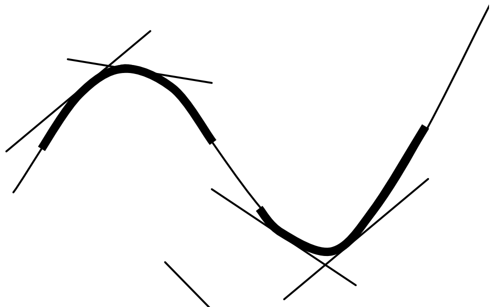
Ex. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^3 - 1} = \frac{0}{0}$ applico il teorema di De L'Hospital e risolvo il limite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^3 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2x - 5}{3x^2} = \frac{2 - 5}{3} = -\frac{3}{3} = -1$$

Ricorda che il teorema si può applicare più volte consecutivamente.

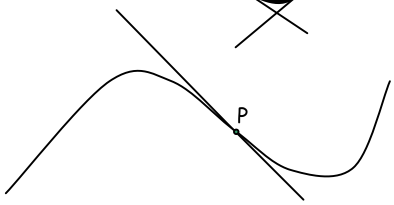
FLESSI E CONCAVITA'

Consideriamo la funzione y = f(x) continua e derivabile in un intervallo [a, b].



La funzione si dice **CONVESSA** in [a, b] se si trova al di sopra delle tangenti tracciate in ogni suo punto dell'intervallo.

La funzione si dice **CONCAVA** in [a, b] se si trova al di sotto delle tangenti tracciate in ogni suo punto dell'intervallo.



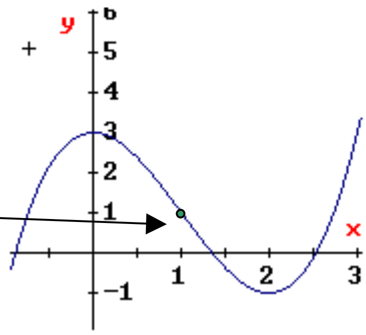
Si dice che la funzione possiede un **PUNTO DI FLESSO** a tangente obliqua nel punto $P(x_0, f(x_0))$ se la tangente alla funzione in P attraversa la funzione e a sinistra di P la funzione si trova sopra (sotto) la tangente e a destra si trova sotto (sopra). **In tale punto la funzione cambia la sua concavità**.

COME SI DETERMINANO I PUNTI A DI FLESSO?

4. Si determina la derivata seconda (derivata della derivata prima) della funzione
5. Si pone uguale a zero la derivata seconda e si determinano le soluzioni x_1, x_2, …
6. Si determinano $f(x_1)$, $f(x_2)$, … sostituendo x_1, x_2, … nella funzione.

Ex. Determinare i punti a tangente orizzontale della funzione $y = x^3 - 3x^2 + 3$

5. Determino la derivata: $y' = 3x^2 - 6x$
6. Determino la derivata seconda: y'' = 6x - 6
7. Pongo la derivata seonda uguale a zero: 6 x – 6 = 0 → $\boxed{x = 1}$
8. In x = 1 la funzione possiede un punto di flesso
9. Le coordinate di tale punto sono:
   x = 1 ⇒ f(1) = 1-3+3 = 1   C(1; 1)
   In questo punto la funzione cambia concavità



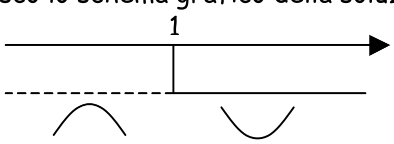
COME SI STUDIA LA CONCAVITA' DI UNA FUNZIONE?

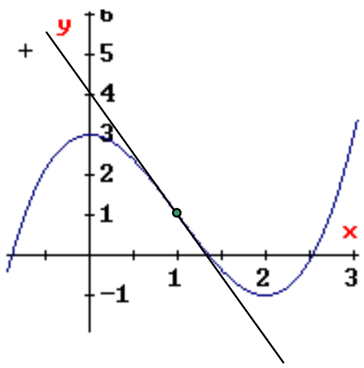
Una funzione ha la CONCAVITA' RIVOLTA VERSO L'ALTO nei punti dove la derivata seconda è positiva ⇒ y = f(x) ha la concavità verso l'alto se f''(x) > 0

Analogamente:

Una funzione è ha la CONCAVITA' VERSO IL BASSO nei punti dove la derivata seconda è negativa ⇒ y = f(x) la la concavità verso il basso se f''(x) < 0

1. Determino la derivata: $y' = 3x^2 - 6x$
2. Determino la derivata seconda: y'' = 6x - 6
3. Pongo la derivata seconda maggiore o uguale a zero: 6 x – 6 ≥ 0 → x ≥ 1
   Costruisco lo schema grafico della soluzioni:

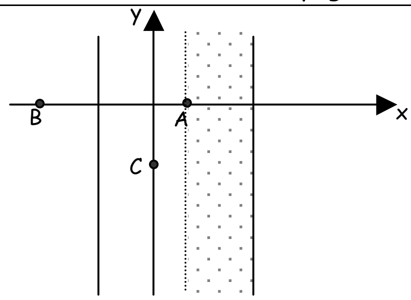




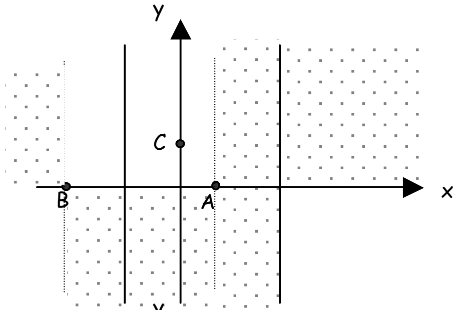
Dallo schema deduco che:
per x > 1 la derivata seconda è positiva quindi la funzione è rivolta verso l'alto
per x < 1 la derivata seconda è negativa quindi la funzione è rivolta verso il basso
In C la funzione cambia la concavità e la tangente attraversa la curva.

Per disegnare il grafico di una funzione devo ricercare:

- DOMINIO = $\{\forall x \in R / \dots\dots\}$
- Intersezione asse x (zeri della funzione) A(…; 0), B(…; 0), …
  risolvendo il sistema $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$
- Intersezione asse y C(0;…) risolvendo il sistema $\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$



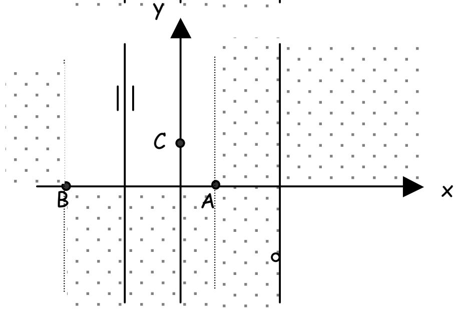
- Segno della funzione, ponendo la funzione > 0 e determinando per quali valori di x la funzione è positiva (ovvero è sopra l'asse x)



- Limiti: si studiano <u>nei punti esclusi dal dominio</u> e agli estremi del dominio

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \dots}$$

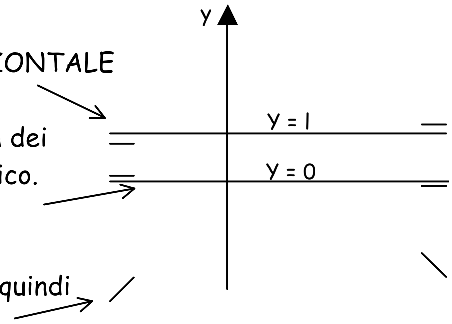
- <u>se risulta ∞</u>, la funzione possiede in x_0 un ASINTOTO VERTICALE di equazione $x = x_0$.
  Occorre stabilire (guardando lo schema del segno della funzione) se tende a -∞ o +∞.
  Per visualizzarlo sul grafico basta mettere un trattino verticale accanto all'asintoto (in alto se tende a +∞, in basso se tende a -∞).



- <u>se risulta un numero l finito</u>, la funzione possiede un buco

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} f(x) = \dots}$$

- <u>se risulta un numero l finito</u>, la funzione possiede ASINTOTO ORIZZONTALE di equazione y = l.
  Per rappresentare sul grafico il risultato traccio l'asintoto e segno con dei trattini orizzontali la direzione con la quale la funzione "esce" dal grafico.
- <u>se risulta zero</u>, la funzione possiede l'asse x come asintoto orizzontale (vedi caso precedente)
- <u>se risulta infinito</u>, la funzione esce dal grafico in direzione "obliqua" e quindi rappresento sul grafico questo risultato con dei trattini obliqui.



- Studio della derivata prima:
  - calcolo y'
  - pongo y' = 0 ossia risolvo y' = 0 ⇒ trovo le ascisse dei punti a tangente orizzontale e, sostituendo nella funzione, trovo le ordinate dei punti.
  - pongo y' > 0 ossia risolvo y' > 0 ⇒ trovo per quali x (per quali intervalli del dominio) la funzione è crescente o decrescente
- Studio della derivata seconda:
  - calcolo y''
  - pongo y'' = 0 ossia risolvo y'' = 0 ⇒ trovo le ascisse dei punti di flesso e, sostituendo nella funzione, trovo le ordinate dei punti
  - pongo y'' > 0 ossia risolvo y'' > 0 ⇒ trovo per quali x (per quali intervalli del dominio) la funzione ha la concavità rivolta verso l'alto o verso il basso.

Rappresento tutti questi elementi sul grafico e traccio un andamento approssimato della funzione.

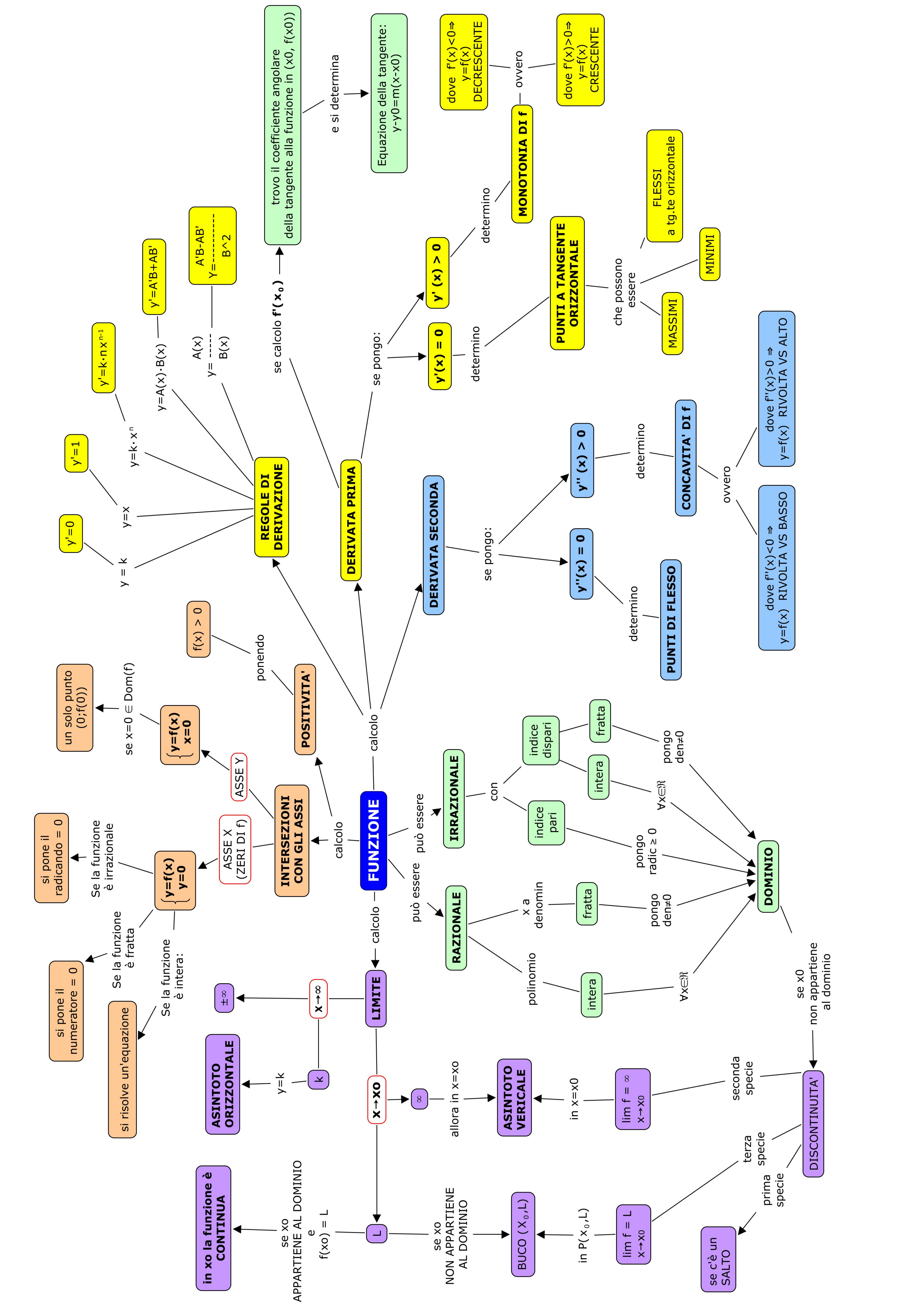
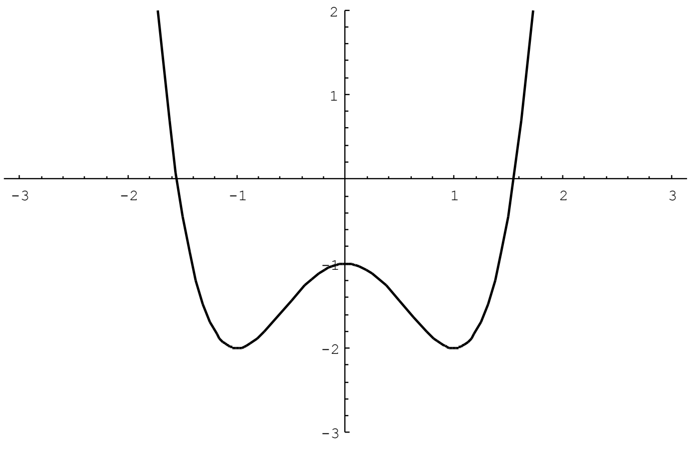

FUNZIONE
calcolo
REGOLE DI DERIVAZIONE
y = k
y'=0
y=x
y'=1
y=k·x^n
y'=k·n·x^(n-1)
y=A(x)·B(x)
y'=A'B+AB'
y= A(x) / B(x)
Y= A'B-AB' / B^2
DERIVATA PRIMA
se calcolo f'(x0)
trovo il coefficiente angolare della tangente alla funzione in (x0, f(x0))
e si determina
Equazione della tangente: y-y0=m(x-x0)
se pongo:
y'(x) = 0
y' (x) > 0
determino
PUNTI A TANGENTE ORIZZONTALE
che possono essere
MASSIMI
MINIMI
FLESSI a tg.te orizzontale
MONOTONIA DI f
ovvero
dove f'(x)<0⇒ y=f(x) DECRESCENTE
dove f'(x)>0⇒ y=f(x) CRESCENTE
DERIVATA SECONDA
y''(x) = 0
y'' (x) > 0
PUNTI DI FLESSO
CONCAVITA' DI f
dove f''(x)<0 ⇒ y=f(x) RIVOLTA VS BASSO
dove f''(x)>0 ⇒ y=f(x) RIVOLTA VS ALTO
POSITIVITA'
ponendo
f(x) > 0
INTERSEZIONI CON GLI ASSI
ASSE Y
y=f(x) x=0
se x=0 ∈ Dom(f)
un solo punto (0;f(0))
ASSE X (ZERI DI f)
y=f(x) y=0
Se la funzione è irrazionale
si pone il radicando = 0
Se la funzione è fratta
si pone il numeratore = 0
Se la funzione è intera:
si risolve un'equazione
può essere
IRRAZIONALE
con
indice pari
indice dispari
intera
fratta
pongo radic ≥ 0
∀x∈ℜ
pongo den≠0
RAZIONALE
x a denomin
polinomio
DOMINIO
se x0 non appartiene al dominio
DISCONTINUITA'
prima specie
se c'è un SALTO
seconda specie
terza specie
LIMITE
x→∞
±∞
k
y=k
ASINTOTO ORIZZONTALE
x→xo
∞
allora in x=xo
ASINTOTO VERICALE
in x=x0
lim f = ∞ x→x0
L
se xo APPARTIENE AL DOMINIO e f(xo) = L
in xo la funzione è CONTINUA
se xo NON APPARTIENE AL DOMINIO
BUCO (X0,L)
in P(x0,L)
lim f = L x→x0

Grafico 1

Dominio	
Zeri	
Segno	
Limiti significativi	
Punti a tangente orizzontale	
Monotonia	
Flessi	
Concavità	

Grafico 2

Dominio	
Zeri	
Segno	
Limiti significativi	
Punti a tangente orizzontale	
Monotonia	
Flessi	
Concavità	



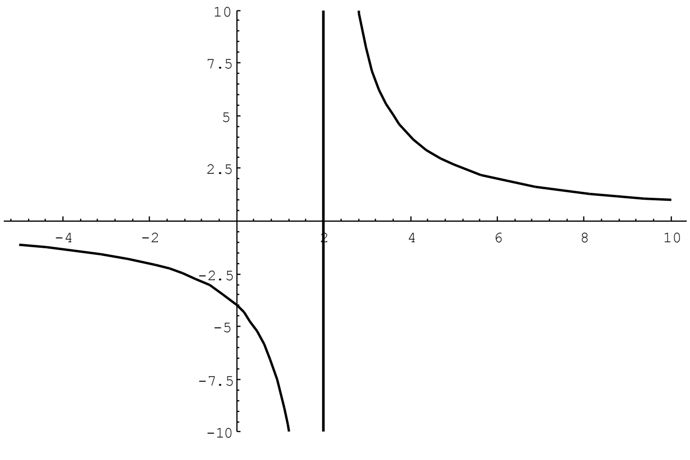
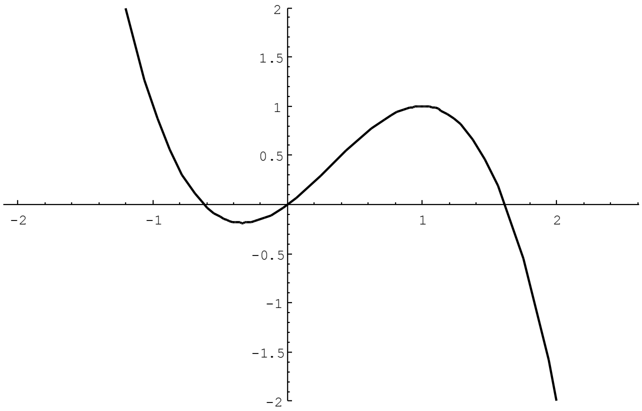


Grafico 1

Dominio	
Zeri	
Segno	
Limiti significativi	
Punti a tangente orizzontale	
Monotonia	
Flessi	
Concavità	

Grafico 2

Dominio	
Zeri	
Segno	
Limiti significativi	
Punti a tangente orizzontale	
Monotonia	
Flessi	
Concavità	



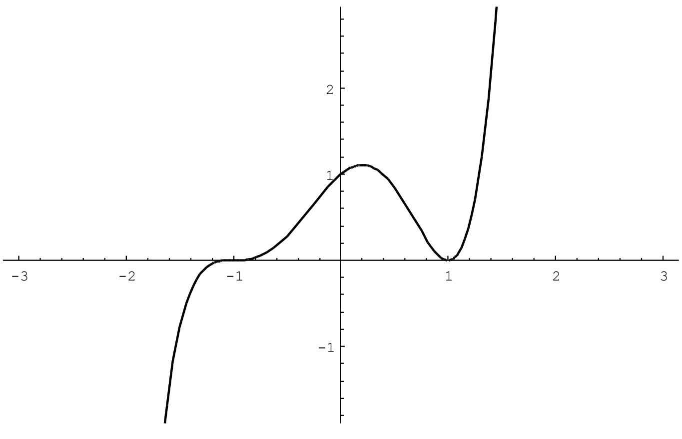
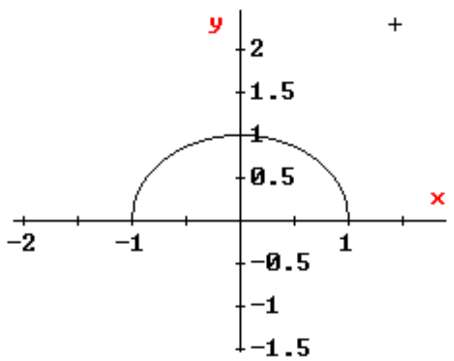


Grafico 1

Dominio	
Zeri	
Segno	
Limiti significativi	
Punti a tangente orizzontale	
Monotonia	
Flessi	
Concavità	

Grafico 2

Dominio	
Zeri	
Segno	
Limiti significativi	
Punti a tangente orizzontale	
Monotonia	
Flessi	
Concavità	



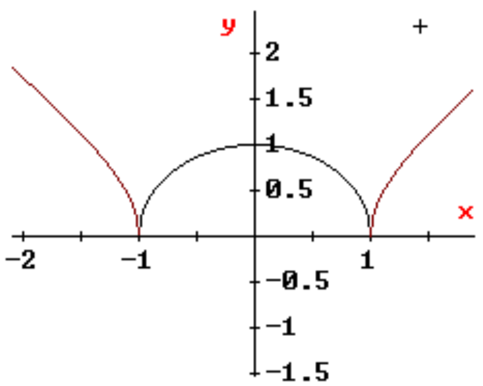
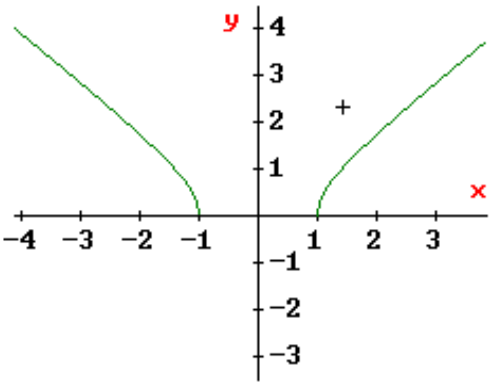


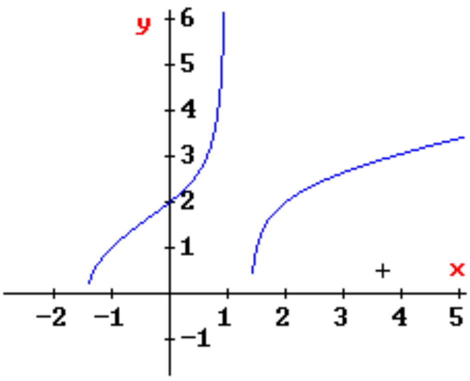
Grafico 1

Dominio	
Zeri	
Segno	
Limiti significativi	
Punti a tangente orizzontale	
Monotonia	
Flessi	
Concavità	

Grafico 2

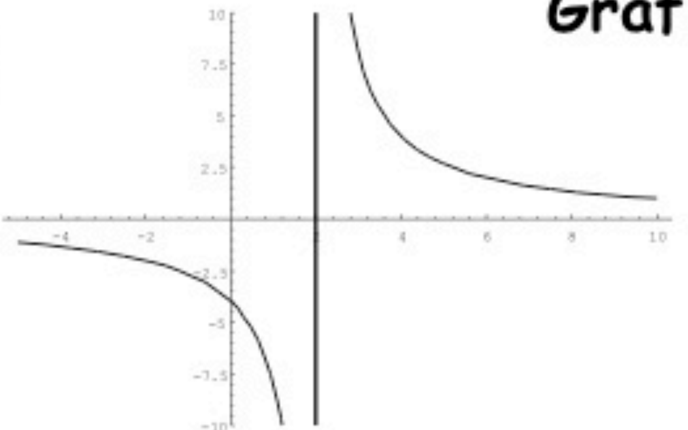
Dominio	
Zeri	
Segno	
Limiti significativi	
Punti a tangente orizzontale	
Monotonia	
Flessi	
Concavità	



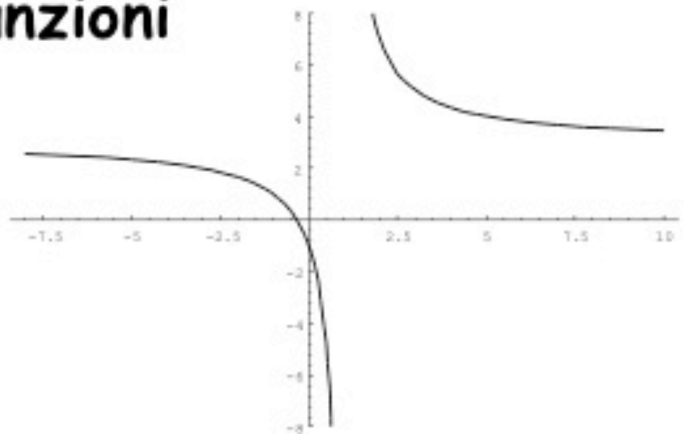


Grafici di funzioni

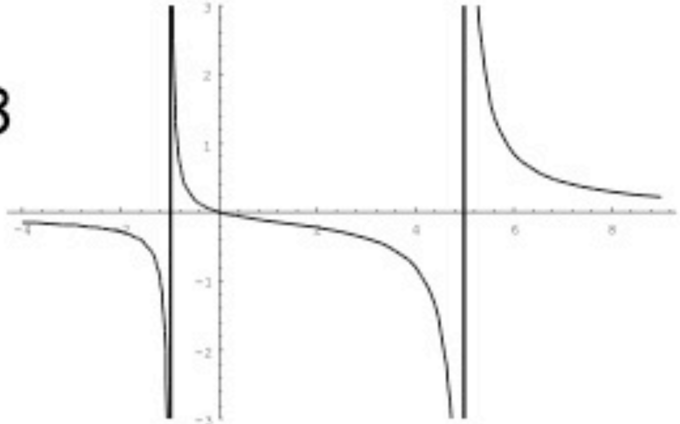
1



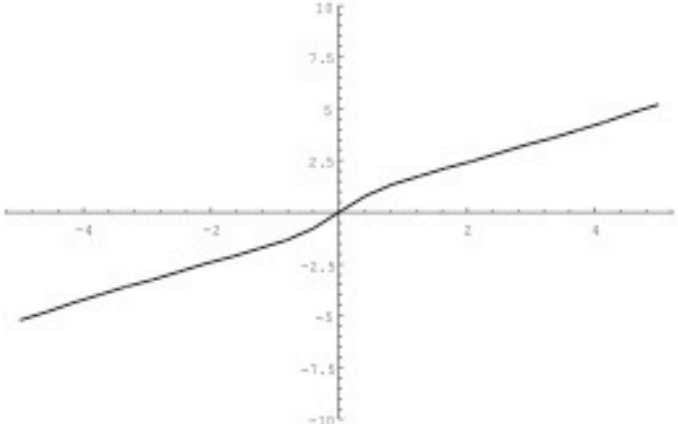
2



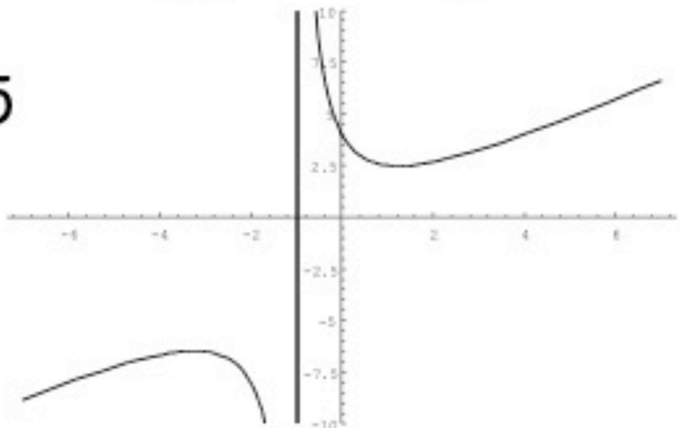
3



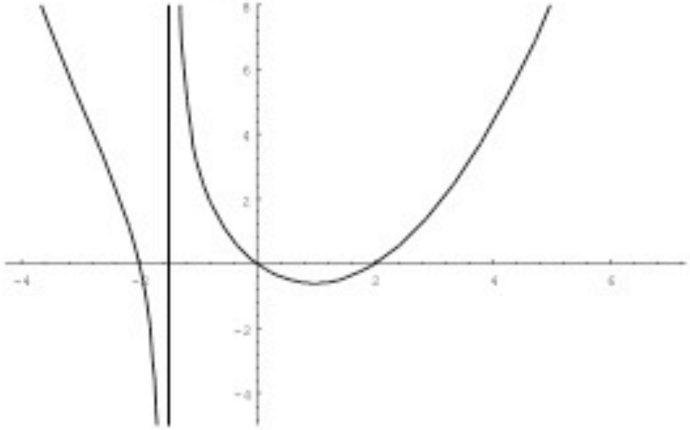
4



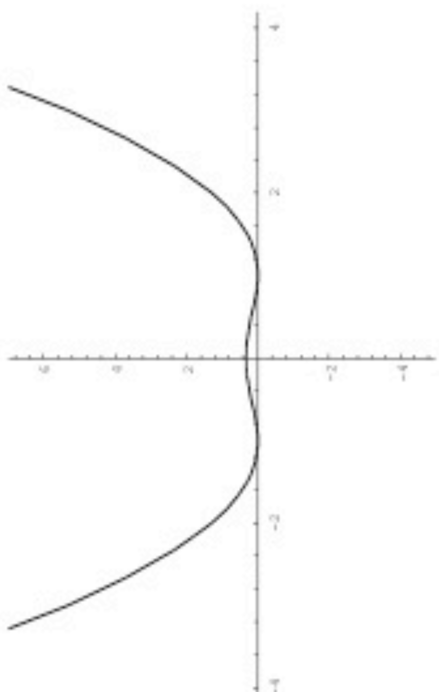
5



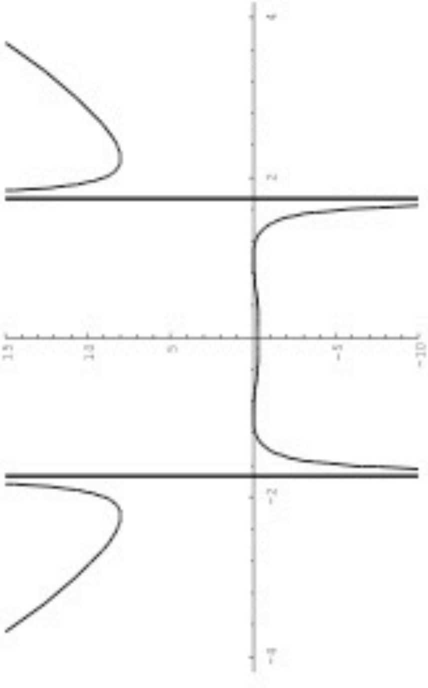
6



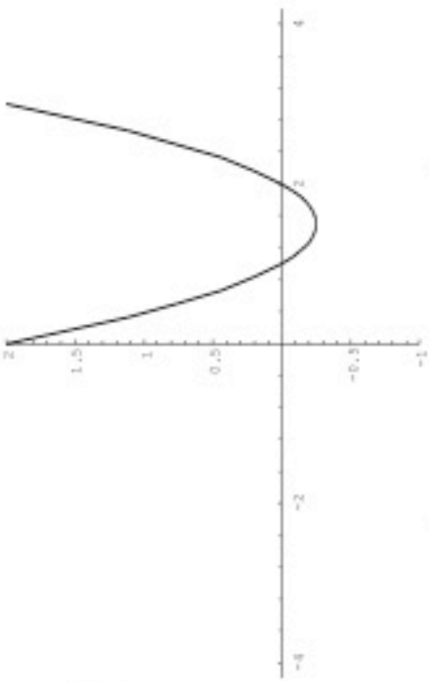
7



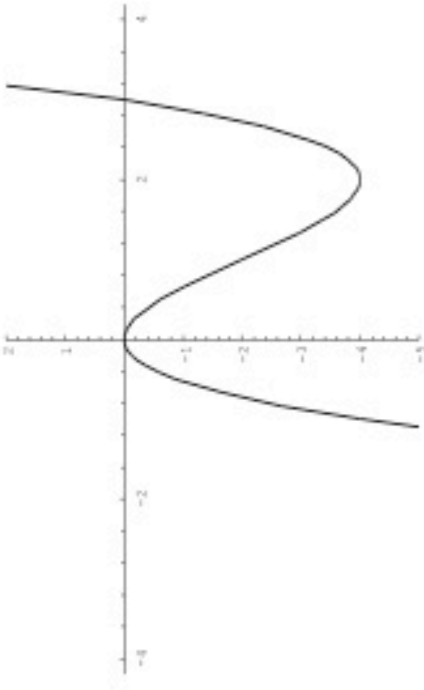
8



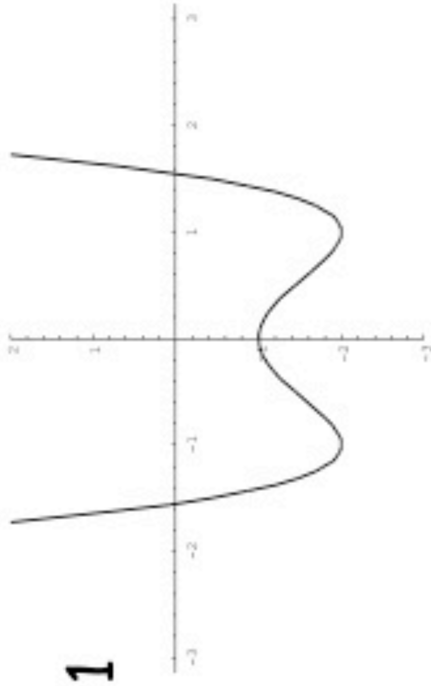
9



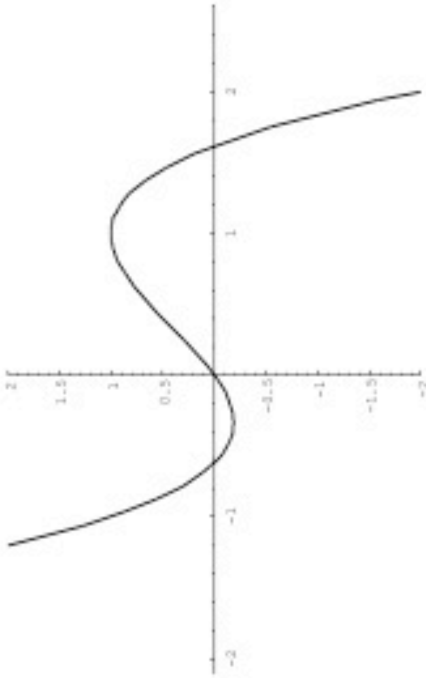
10



11

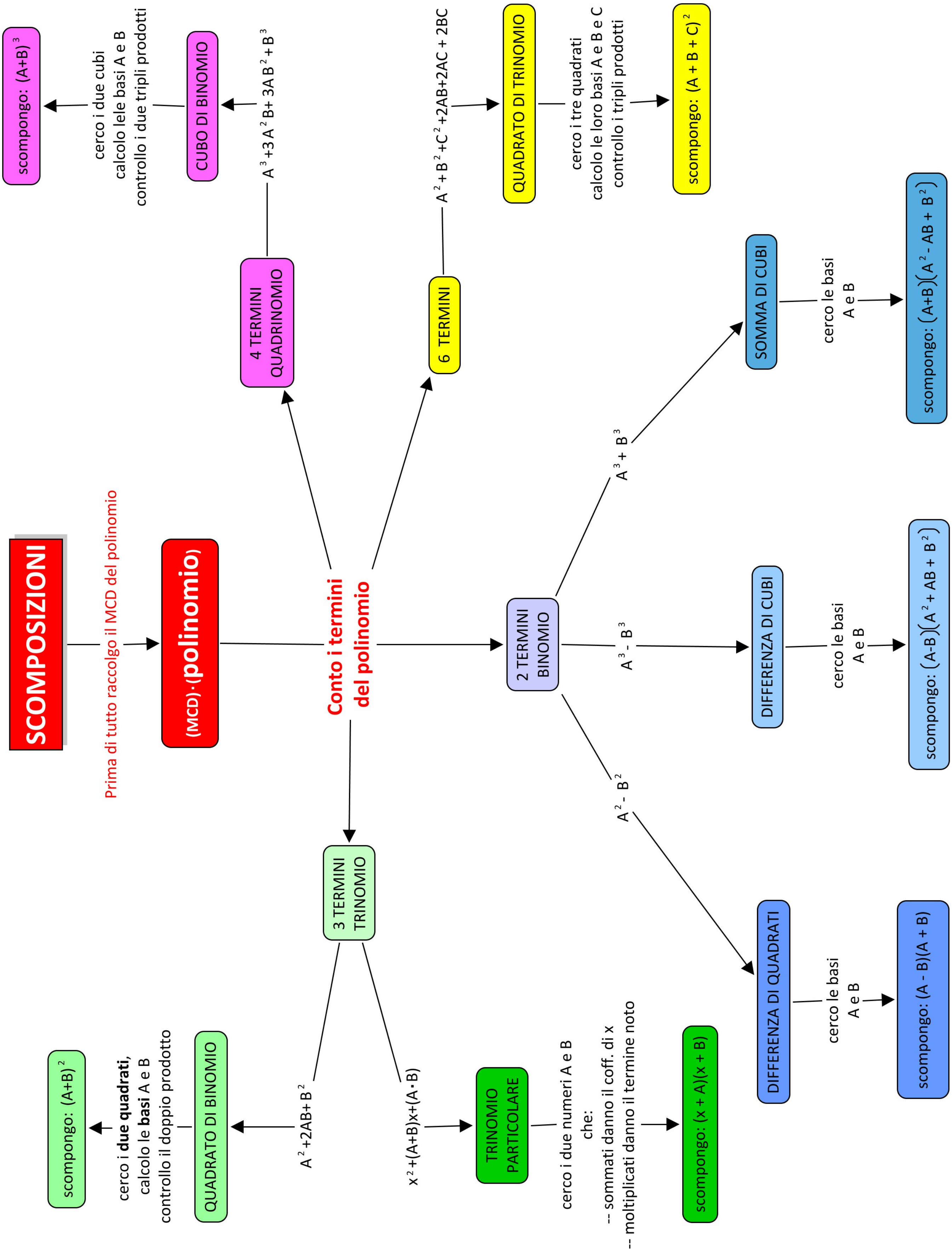


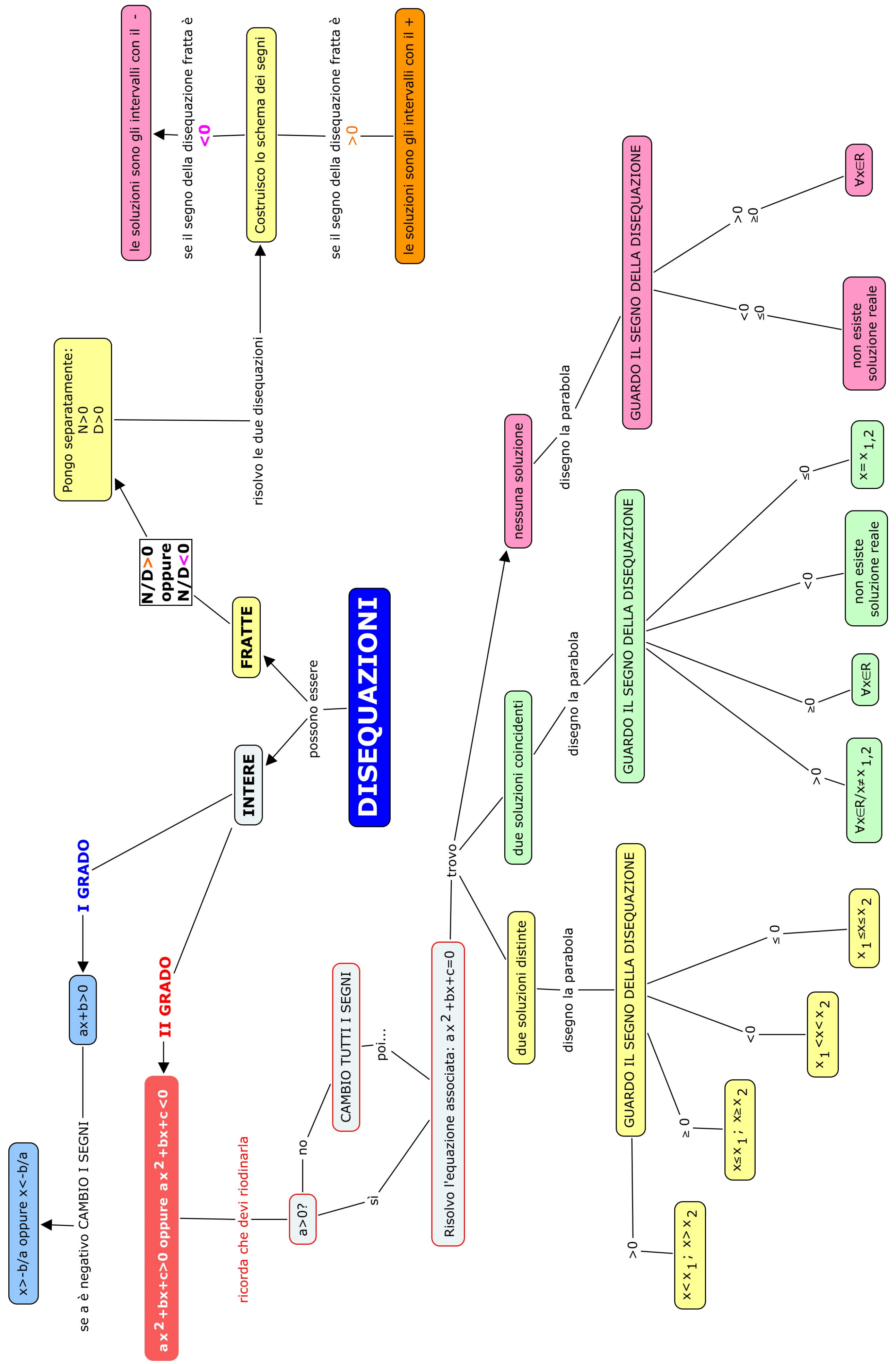
12



DOMANDE ORALI ANALISI

1. Cosa si intende funzione?
2. Come si classificano le funzioni?
3. Dominio di una funzione (distinguere i vari tipi di funzione e spiegare come si ricerca il dominio di ciascuna)
4. Come si determina l'intersezione di una funzione con gli assi?
5. Cosa sono gli zeri di una funzione
6. Cosa si intende per studio del segno di una funzione?
7. Cosa si intende per $f(x_0)$?
8. Intervallo chiuso, aperto, limitato illimitato
9. Intorno di un punto x_0 e intorno di infinito
10. I limiti: quali tipi di limiti conosci?
11. Dove si studiano i limiti?
12. Forme indeterminate del tipo 0/0 e Inf/inf: come si sciolgono le indeterminazioni?
13. Teorema di De L'Hopital e sua applicazione
14. Come si rappresentano graficamente i risultati di un limite in un punto finito x_0?
15. Limiti per x che tende ad infinito di una funzione razionale intera
16. Limiti per x che tende ad infinito di una funzione razionale fratta
17. Asintoti: quali tipi di asintoti conosci e come li determini?
18. Cosa si intende per funzione continua in un punto
19. Cosa si intende per funzione continua in un intervallo
20. Discontinuità di una funzione in un punto: quali conosci e come si definiscono
21. Il rapporto incrementale di una funzione: definizione e significato geometrico
22. Derivata di una funzione in un punto: definizione e significato geometrico
23. Definizione di funzione derivata
24. Regole di derivazione (derivata di un monomio, derivata di una somma, di un prodotto, di un rapporto e di una radice)
25. Cosa si intende per punti a tangente orizzontale e come si determinano
26. Quando una funzione è crescente/decrescente
27. Studio della monotonia di una funzione
28. Cosa si intende per flesso di una funzione in un punto
29. Come si studia la concavità di una funzione
30. Quali sono i passi per studiare una funzione?
31. Quando una funzione razionale non possiede asintoti verticali?
32. Quando una funzione razionale non possiede asintoti orizzontali?
33. Confronto tra il grafico di una funzione e quello della sua derivata


SCOMPOSIZIONI
Prima di tutto raccolgo il MCD del polinomio
(MCD)·(polinomio)
Conto i termini del polinomio
4 TERMINI QUADRINOMIO
$A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$
CUBO DI BINOMIO
cerco i due cubi
calcolo lele basi A e B
controllo i due tripli prodotti
scompongo: $(A+B)^3$
6 TERMINI
$A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC$
QUADRATO DI TRINOMIO
cerco i tre quadrati
calcolo le loro basi A e B e C
controllo i tripli prodotti
scompongo: $(A+B+C)^2$
2 TERMINI BINOMIO
A^3+B^3
SOMMA DI CUBI
cerco le basi A e B
scompongo: $(A+B)(A^2-AB+B^2)$
A^3-B^3
DIFFERENZA DI CUBI
cerco le basi A e B
scompongo: $(A-B)(A^2+AB+B^2)$
A^2-B^2
DIFFERENZA DI QUADRATI
cerco le basi A e B
scompongo: $(A-B)(A+B)$
3 TERMINI TRINOMIO
$A^2+2AB+B^2$
QUADRATO DI BINOMIO
cerco i **due quadrati**,
calcolo le **basi** A e B
controllo il doppio prodotto
scompongo: $(A+B)^2$
$x^2+(A+B)x+(A\cdot B)$
TRINOMIO PARTICOLARE
cerco i due numeri A e B
che:
-- sommati danno il coff. di x
-- moltiplicati danno il termine noto
scompongo: $(x+A)(x+B)$


DISEQUAZIONI
possono essere
INTERE
FRATTE
N/D>0 oppure N/D<0
Pongo separatamente: N>0 D>0
risolvo le due disequazioni
Costruisco lo schema dei segni
se il segno della disequazione fratta è <0
le soluzioni sono gli intervalli con il -
se il segno della disequazione fratta è >0
le soluzioni sono gli intervalli con il +
I GRADO
ax+b>0
se a è negativo CAMBIO I SEGNI
x>-b/a oppure x<-b/a
II GRADO
$ax^2+bx+c>0$ oppure $ax^2+bx+c<0$
ricorda che devi riodinarla
a>0?
no
CAMBIO TUTTI I SEGNI
poi...
sì
Risolvo l'equazione associata: $ax^2+bx+c=0$
trovo
due soluzioni distinte
disegno la parabola
GUARDO IL SEGNO DELLA DISEQUAZIONE
>0
$x<x_1$; $x>x_2$
≥0
$x\le x_1$; $x\ge x_2$
<0
$x_1<x<x_2$
≤ 0
$x_1\le x\le x_2$
due soluzioni coincidenti
disegno la parabola
GUARDO IL SEGNO DELLA DISEQUAZIONE
>0
$\forall x\in R/x\ne x_{1,2}$
≥0
$\forall x\in R$
<0
non esiste soluzione reale
≤0
$x=x_{1,2}$
nessuna soluzione
disegno la parabola
GUARDO IL SEGNO DELLA DISEQUAZIONE
<0 ≤0
non esiste soluzione reale
>0 ≥0
$\forall x\in R$

STUDIO DI FUNZIONE: ALCUNE REGOLE

DOMINIO (ampiamente trattato...)

INTERSEZIONE ASSE Y: $\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$ se x = 0 è nel dominio della funzione allora l'intersezione della f.ne con l'asse y è UNICA!

INTERSEZIONE ASSE X: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$ si sostituisce 0 alla y della funzione e si risolve una <u>equazione</u>.

$\begin{cases} 0 = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 0$

- **Fratta:** $\dfrac{n(x)}{d(x)} = 0$ **una frazione è nulla se è <u>NULLO il NUMERATORE</u>** $\Rightarrow \boxed{n(x) = 0}$
- **Irrazionale:** $\sqrt[n]{R(x)} = 0$ **una radice è nulla se è <u>NULLO il RADICANDO</u>** $\Rightarrow \boxed{R(x) = 0}$

SEGNO DELLA FUNZIONE: $y > 0$ Si pone funzione maggiore di zero. Il risultato della disequazione dirà **PER QUALI VALORI DEL DOMINIO la funzione è POSITIVA.**

$f(x) > 0$

- **Fratta:** $\dfrac{n(x)}{d(x)} > 0 \Rightarrow \begin{cases} n(x) > 0 \\ d(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow \ldots$
- **Irrazionale indice dispari:** $\sqrt[disp]{R(x)} > 0 \Rightarrow R(x) > 0$ **una radice con indice dispari è positiva se è positivo il radicando**
- **Irrazionale indice pari:** $\sqrt[pari]{R(x)} > 0 \Rightarrow \forall x \in D_f$ **una radice con indice pari è SEMPRE POSITIVA sul dominio**

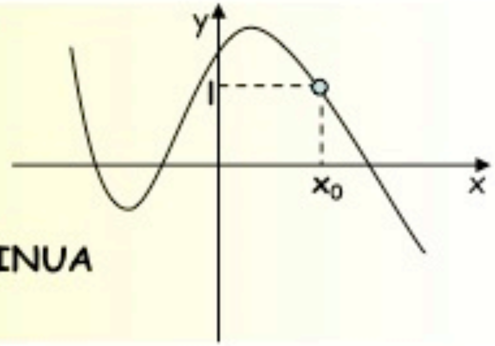
Quadro di riepilogo sui LIMITI

Limite per $x \to x_0$

Se x_0 appartiene al dominio della funzione e studio il $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Troverò che: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

quindi la funzione **passa per il punto $P(x_0, l)$** e in quel punto la funzione è **CONTINUA**

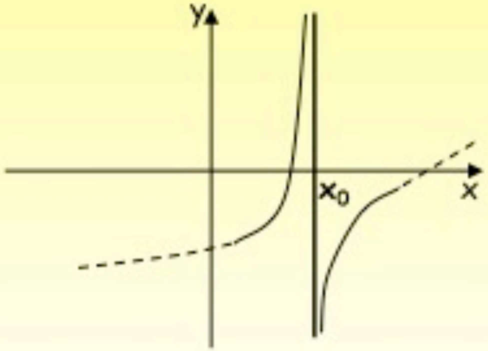


Se x_0 NON appartiene al dominio della funzione e studio il $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ si possono verificare 2 casi:

Trovo che: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

quindi la funzione ha un **asintoto verticale in x_0**

con eq.ne $x = x_0$

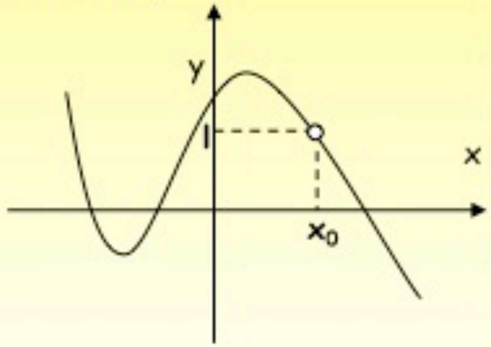


e in x_0 la funzione **ha una DISCONTINUITA' DI SECONDA SPECIE**

Trovo che: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

quindi la funzione ha un **buco in x_0**

di **coordinate** (x_0, l)



e in x_0 la funzione **ha una DISCONTINUITA' DI TERZA SPECIE**

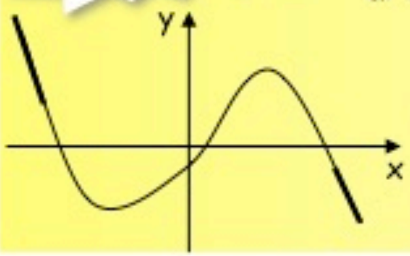
Quadro di riepilogo sui LIMITI — Limite per $x \to \infty$

Per conoscere l'andamento della funzione "in uscita" o "in entrata" dal grafico devo studiare il $\lim_{x\to\infty} f(x)$

Si possono presentare 3 casi:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

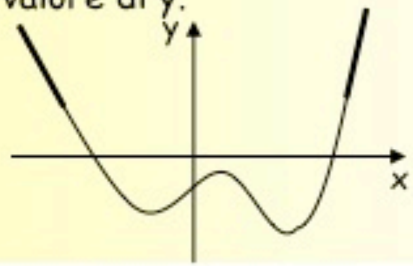
Ciò significa che la funzione "esce" o "entra" nel grafico con direzione obliqua, ovvero: al crescere del valore di x, cresce anche il valore di y.



$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

oppure, per esempio

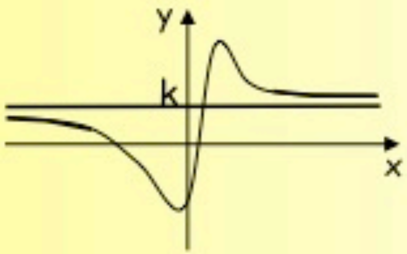


$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = k$

Ciò significa che la funzione "esce" o "entra" nel grafico avvicinandosi sempre di più ad una **retta orizzontale** y = k detta **ASINTOTO ORIZZONTALE**:



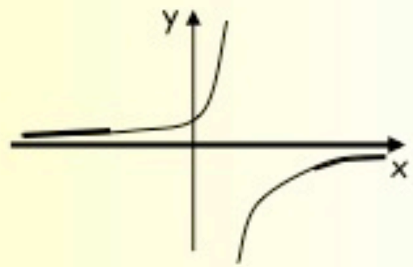
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = k$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = k$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

Se **k = 0** allora

l'ASINTOTO ORIZZONTALE è **l'ASSE X**



Classificare le seguenti funzioni e determinare il dominio.

1. $y = \frac{3x}{x^2 - 4}$
2 $Y = 2x^3 - 4x^2 + x$
3. $y = \frac{x^2}{1 - x^2}$
4. $y = \sqrt{\frac{3x - 6}{1 - x}}$
5. $y = \sqrt{8 - x^2}$
6. $y = \frac{4x - 4}{-1 + x - x^2}$
7. $y = \sqrt[3]{x - 2x^2}$
8. $y = \sqrt{x^3 - 4x}$
9. $y = \sqrt{5x^2 - 4x + 6}$
10. $y = \frac{x}{x^3 + 1}$
11. $y = \sqrt[3]{x^3 + 1}$
12. $y = \frac{3x - 4}{3 - x^2}$
13. $y = \sqrt{x^2 - 10x + 25}$
14. $y = \frac{2x}{x^2 - 10x + 25}$
15. $y = \sqrt{\frac{2 - 4x}{x - x^2}}$
16. $y = \sqrt{\frac{x}{x - 2}}$
17. $y = \sqrt[5]{\frac{2x - 4}{x^3}}$
18. $y = \sqrt{4 - 9x^2}$
19. $y = \frac{1}{x}$
20. $y = \frac{2 - 4x}{x^2 + 9}$
21. $y = x^4 - 5x^2$
24. $y = \sqrt{2x^2 - 13x + 21}$
25. $y = \sqrt[3]{\frac{2x - 2}{x^2 - 4x + 4}}$